Über das homogene Dirichlet-Problem bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom Typ der Boussinesq-Gleichung

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Gerald Warnecke-Lähnemann
aus Berlin

Berlin
1985

Über das homogene Dirichlet-Problem bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom Typ der Boussinesq-Gleichung

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Gerald Warnecke-Lähnemann
aus Berlin

Berlin
1985

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549619_0020

Betreuer: Professor Dr. Karl Doppel

Gutachter: Professor Dr. Bogdan Bojarski

Professor Dr. Karl Doppel

Termin der Disputation: 12.7.1985

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr. Karl Doppel ganz herzlich meinen Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und seine engagierte Betreuung, die mit zahlreichen anregenden Gesprächen verbunden war, aussprechen.

Auch möchte ich Herrn Professor Dr. Ilppo Simo Louhivaara für seine Hinweise danken.

Weiterhin danke ich Bernd Schomburg für seine Diskussionsbereitschaft.

Außerdem danke ich Antonius Steinkamp und Christoph v. Stuckrad für ihre Hilfe bei der Benutzung des Textverarbeitungssystems.

Inhalt

1. Einleitung 1

2. Multiindexmengen, Bezeichnungen 8

3. Verallgemeinerte Sobolevräume 11

4. Einbettungen für beschränkte Gebiete 15

5. Spursätze 22

6. Die Palais-Smale-Bedingung und das 'Mountain Pass' Lemma 29

7. Lineare Differentialoperatoren 33

8. Nemytskii-Operatoren 35

9. Verallgemeinerte Randwertaufgaben 37

10. Fréchet - differenzierbare Funktionale 39

11. Funktionale, die einer Palais - Smale - Bedingung genügen 51

12. Ein Existenzsatz 57

13. Beispiele 66

Literatur 78

Anhang:

Zusammenfassung

Lebenslauf

1. Einleitung

1.1. Problemstellung

1.1.1. Ausgangspunkt der Untersuchungen, die zu dieser Arbeit führten, war die Fragestellung, ob nichtlineare Gleichungen vom Typ der Boussinesq–Gleichung

$$u_{tt} + u_{zz} - u_{zzzz} + c\,(u^2)_{zz} = 0, \qquad c \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

der mit ihr verwandten Zabusky–Gleichung

$$u_{tt} + u_{zz} - u_{zzzz} + c\,u_z\,u_{zz} = 0, \qquad c \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

oder der "quadrierten Wellengleichung"

$$u_{zztt} - u^k = 0, \qquad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2, \tag{1.3}$$

die Behandlung eines verallgemeinerten Randwertproblems (Dirichlet–Problems) auf beschränkten Gebieten mit Hilbertraummethoden zulassen, die für elliptische semilineare Gleichungen entwickelt wurden. Die im linearen Anteil von (1.1), (1.2) und (1.3) auftretenden Operatoren sind nicht elliptisch, bei der letzten Gleichung nicht einmal hypoelliptisch (zur Definition siehe Hörmander [14]). Die Hilbertraummethoden bestehen darin, daß man die Differentialgleichung durch eine Funktionalgleichung auf einem geeigneten Hilbertraum ersetzt und letztere auf dem Hilbertraum löst. Die erhaltenen Lösungen faßt man als verallgemeinerte Lösungen der Differentialgleichung auf. Sie müssen aber nicht genügend oft differenzierbar sein, um Lösungen im üblichen Sinne zu

sein. Die Motivation für diese Vorgehensweise kommt aus der Variationsrechnung, da dort solche Funktionalgleichungen bei der Berechnung der Extrema gewisser Fréchet–differenzierbarer Funktionale auftreten.

1.1.2. Die Gleichung (1.1) wurde erstmalig von Boussinesq [7], [8] aufgestellt, um Oberflächenwasserwellen zu beschreiben. Sie ist auch eine Approximation des Gittermodells exponentiell gekoppelter Massen, das von Toda eingeführt wurde (siehe Toda und Wadati [31]) und beschreibt akustische Wellen im Plasma (siehe Scott [28]). Die Gleichung (1.2) ist das kontinuierliche Analogon des Fermi–Pasta–Ulam–Modells (siehe Fermi, Pasta und Ulam [11]; Kruskal [19], Zabusky [34]). Beide Gleichungen haben in letzter Zeit einige Beachtung im Rahmen der Untersuchung nichtlinearer Wellengleichungen gefunden und sind mit der Korteweg–de Vries–Gleichung verwandt (siehe Kruskal [19]). Die Gleichung (1.1) besitzt unter anderem Solitonlösungen (siehe Hirota [13], Toda und Wadati [31]) und unendlich viele Integrale in Involution (Zakharov [35]). Aufgrund der den Gleichungen (1.1) und (1.2) zugrunde liegenden physikalischen Modelle scheint es natürlich, ein Cauchy–Problem zu untersuchen. Die Tatsache, daß die linearisierten Gleichungen nach Doppel und Jacob [10], Jacob [15] eher elliptischen, als hyperbolischen Charakter haben, wirft die Frage auf, inwieweit sich zu diesen Gleichungen überhaupt ein Cauchy-Problem sinnvoll formulieren läßt, wie dies etwa bei der Korteweg–de Vries – Gleichung der Fall ist. Auf die diesbezüglichen Schwierigkeiten bei (1.1) haben Deift, Tomei und Trubowitz [9] hingewiesen, und McKean [22]

bezeichnet deshalb (1.1) als "bad Boussinesq". Bei den Gleichungen muß man das Vorzeichen vor dem Term vierter Ordnung beachten. Wird dieses umgekehrt, so erhält man bei (1.1) und (1.2) die "hyperbolische" Balkengleichung mit einer Nichtlinearität, die zum Beispiel von Kalantarov und Ladyzhenskaja [18] oder McKean [22] (dort als "good Boussinesq" bezeichnet) untersucht wurde.

1.1.3. Es werden daher in dieser Arbeit Hilbertraummethoden für semilineare elliptische Randwertprobleme auf ein verallgemeinertes homogenes Dirichlet–Problem (siehe Kapitel 10) für nicht notwendigerweise elliptische semilineare Gleichungen

$$A(x,D)u \;-\; (-1)^{|\gamma|}\,\partial^{\gamma}\tilde{B}(\partial^{\gamma}u) \;=\; 0 \qquad (1.4)$$

($\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ ist ein Multiindex, siehe Abschnitt 2.1.) angewandt. Dabei ist $A(x,D)$ ein linearer Differentialoperator in Divergenzform, dem eine positive Bilinearform (1.6) bzw. (7.2) auf einem geeigneten Hilbertraum zugeordnet werden kann. $\tilde{B}(\cdot)$ ist ein Nemytskiĭ–Operator (siehe Kapitel 8). Es wird in Kapitel 12 unter zusätzlichen Voraussetzungen ein Existenzsatz für Lösungen des in Kapitel 9 eingeführten verallgemeinerten homogenen Dirichlet–Problems angegeben (Satz 12.1.), der mit Hilfe eines "Mountain Pass" Lemmas bewiesen wird.

1.2. Überblick

1.2.1. Wir betrachten reelle lineare Operatoren in Divergenzform

$$A(\cdot,D) = \sum_{\alpha,\beta\in A} (-1)^{|\alpha|}\,\partial^{\alpha} a_{\alpha\beta}(\cdot)\,\partial^{\beta} \tag{1.5}$$

auf einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$, $a_{\alpha\beta} \in C^m(\bar{G})$, $m = |\alpha|$ (siehe Kapitel 7). $A \neq \phi$ ist eine endliche Menge von Multiindices (siehe Kapitel 2). Die dem Operator formal zugeordnete Bilinearform

$$A[\varphi,\psi] = \sum_{\alpha,\beta\in A} \int_G a_{\alpha\beta}(x)\,\partial^{\beta}\varphi\,\partial^{\alpha}\psi \; dx \tag{1.6}$$

für $\varphi,\psi \in C_0^{\infty}(G)$, soll auf einem eventuell anisotropen Sobolevraum $H_0^A(G)$ (siehe Abschnitt 3.2.) positiv sein, d.h. der Ungleichung

$$A[u,u] \geq C_0 \| u \|_A^2 \tag{1.7}$$

für alle $u \in H_0^A(G)$ genügen. Somit müssen die linearen Operatoren (1.5) V–elliptisch ($V = H_0^A(G)$) im Sinne von Showalter [29] sein.

Schon bei Nikol'skiĭ [24] sowie Louhivaara und Simader [20], [21] wurden verallgemeinerte Dirichlet–Probleme für nicht hypoelliptische lineare Gleichungen behandelt. Angeregt durch letztere Arbeiten wurden von Doppel und Jacob [10], Jacob [15] allgemeinere lineare Operatoren $A(\cdot,D)$, die (1.7) bzw. eine verallgemeinerte Gårdingsche Ungleichung erfüllen, behandelt (siehe auch Jacob und Schomburg [16]). Es hat sich gezeigt, daß die bekannten Hilbertraummethoden für lineare elliptische Randwertprobleme (siehe

Friedman [12] oder Showalter [29]) auch auf gewisse nicht hypoelliptische Randwertaufgaben übertragbar sind. Analog gilt dies auch für die hier behandelten semilinearen Gleichungen. In Abschnitt 13.2. wird ein entsprechendes Beispiel gegeben. Die entscheidende Idee ist es, zu dem Operator $A(\cdot, D)$ den geeigneten verallgemeinerten Sobolevraum $H_0^A(G)$ einzuführen (siehe Doppel und Jacob [10]). Diese Räume werden in Kapitel 3 eingeführt. Die Räume $H_0^A(G)$ sind bei elliptischen Gleichungen klassische isotrope Sobolevräume. Diese Räume sind bei Adams [2], ausführlich dargestellt.

1.2.2. In dieser Arbeit ist eine wesentliche Bedingung an (1.4), daß die Gleichung sich als Euler–Gleichung eines Variationsproblems auffassen läßt. Unter den Voraussetzungen, daß die Bedingungen (E1) (siehe Abschnitt 10.2.) und (E2) (siehe Abschnitt 11.1.) erfüllt sind, wird gezeigt, daß das zugehörige Funktional Fréchet–differenzierbar ist, Satz 10.5., und einer Palais–Smale–Bedingung genügt, Satz 11.1.. Die oben erwähnte Funktionalgleichung zu (1.4) hat die Gestalt

$$A[u, \varphi] - \int_G \tilde{B}(\partial^\gamma u)\partial^\gamma \varphi \, dx = 0 \qquad (1.8)$$

für $u \in H_0^A(G)$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Mit den weiteren Bedingungen (E3), (E4) (siehe Abschnitt 12.3.) kann dann ein "Mountain Pass" Lemma, Satz 6.3., angewandt werden, um die Existenz einer nichttrivialen Lösung von (1.8) nachzuweisen. Diese Methode wurde von Ambrosetti und Rabinowitz [3] für elliptische semilineare Gleichungen entwickelt. Die dort behandelten semilinearen

elliptischen Gleichungen (deren Nichtlinearitäten den Bedingungen (p_1) - (p_5) in Ambrosetti und Rabinowitz [3] genügen) erfüllen auch die Voraussetzungen von Satz 12.1. . Unser Existenzsatz ist auch für elliptische Gleichungen insofern allgemeiner, als wir in gewissen Fällen in dem nichtlinearen Term auch Ableitungen der gesuchten Funktion zulassen. Dazu benötigen wir spezielle Elemente in $H_0^A(G)$, deren Existenz wir mit Lemma 10.7. nachweisen.

1.2.3. Damit die Methode im hier behandelten Fall funktioniert, ist es notwendig, Einbettungseigenschaften der Räume $H_0^A(G)$ zu kennen. Insbesondere spielen Kompaktheitsbedingungen eine wichtige Rolle beim Nachweis der Palais–Smale–Bedingung. In Kapitel 4 werden daher diverse Resultate über die $H_0^A(G)$–Räume zusammengestellt. Eine zentrale Rolle nehmen in dieser Arbeit die verallgemeinerten Sobolevschen Ungleichungen in Satz 4.5. ein (siehe Besov, Il'in und Nikol'skiĭ [6], Chapter 3).

1.2.4. Die gefundenen Lösungen in $H_0^A(G)$ erfüllen natürliche Randbedingungen. Diese ergeben sich aus den Sätzen über Spuroperatoren in Kapitel 5 . Die betrachteten Gebiete wurden anscheinend von Nikol'skiĭ [23] eingeführt. Spursätze für anisotrope Sobolevräume wurden auch von Rákosník [27] behandelt.

1.2.5. Im letzten Kapitel werden als Beispiele unter anderem die Gleichungen (1.1), (1.2) und (1.3) behandelt. Außerdem erhält man mit einem Ansatz für solitäre Wellen, die sich in eine Richtung bewegen, aus der Kadomtsev–Petviashvili–Gleichung (Kadomtsev und Petviashvili [17], Ablowitz und Fokas [1]) die Boussinesq–Gleichung.

2. Multiindexmengen, Bezeichnungen

2.1. Zuerst führen wir einige Notationen ein. Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}_0^N$ die Menge der **Multiindices** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ mit $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ für $j = 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$). Analog bezeichne $\mathbb{N}^N$ die Multiindices mit positiven Komponenten. Wir führen die **Ordnung von α** ein

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \tag{2.1}$$

und setzen

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}, \tag{2.2}$$

wobei

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

für $1 \le k \le N$ ist. Des weiteren definieren wir für $x \in \mathbb{R}^N$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}. \tag{2.3}$$

2.2. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^N$, dann gelte

$$\begin{aligned} x \le y &, \text{ wenn } x_j \le y_j \text{ für } j = 1, \dots, N, \\ x < y &, \text{ wenn } x_j < y_j \text{ für } j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nun seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ mit $\beta \le \alpha$, dann setzen wir

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_N!}{(\alpha_1-\beta_1)! \cdots (\alpha_N-\beta_N)!\,\beta_1! \cdots \beta_N!}. \tag{2.5}$$

Außerdem sei für $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N) \in \mathbb{N}^N$

$$|\alpha : \gamma| := \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\gamma_j}. \tag{2.6}$$

Bemerkung 2.1. $|\alpha : \gamma| = 1$ bedeutet, daß α auf der von den Punkten $(\gamma_1, 0, \ldots, 0), \cdots, (0, \ldots, 0, \gamma_N)$ in $\mathbb{R}^N$ aufgespannten Hyperebene liegt. □

Es seien $m \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{N}_0^N$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, wir setzen

$$(m) := \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N \text{ und } |\alpha| = m\},$$

$$(\lambda) := \{(\lambda_1, 0, \ldots, 0), \cdots, (0, \ldots, 0, \lambda_N)\}.$$

Wir definieren folgende spezielle Multiindices

$$\varepsilon_j := (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{Nj}) \quad \text{mit} \quad \delta_{kj} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases} \tag{2.7}$$

und

$$\mathbb{1} := (1, \ldots, 1). \tag{2.8}$$

2.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine endliche Menge, $M = \{a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a^{(j)} \in \mathbb{R}^N$ für $j = 1, \ldots, k$. Dann ist die **konvexe Hülle** von M definiert durch

$$\text{ch } M := \{ x \in \mathbb{R}^N \mid \text{Es existieren } t_1, \dots, t_k \in [0,1] \text{ mit } \sum_{j=1}^{k} t_j = 1 \text{ und } x = \sum_{j=1}^{k} t_j a^{(j)} \}. \tag{2.9}$$

Es sei $A \neq \phi$ eine endliche Multiindexmenge, d.h. $A \subset \mathbb{N}_0^N$, $A = \{ \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)} \}$, $k \in \mathbb{N}$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein

$$\bar{A} := \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N \text{ und es existiert ein } \sigma \in A \text{ mit } \alpha \leq \sigma \},$$

$$|A| := \max_{\alpha \in A} |\alpha| \quad \text{(die Ordnung von } A\text{)},$$

$$\text{konv} A := \text{ch } A \cap \mathbb{N}_0^N.$$

2.4. In dieser Arbeit bezeichnet G immer ein **Gebiet** in $\mathbb{R}^N$, d.h. eine offene, zusammenhängende Teilmenge. Mit ∂G bezeichnen wir den Rand von G und mit $\bar{G}$ den (topologischen) Abschluß von G. Sei $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, dann bezeichne $f\big|_G$ die **Einschränkung von** f auf das Gebiet G und wir setzen

$$\text{supp } f := \overline{\{ x \in G \mid f(x) \neq 0 \}}.$$

Wir betrachten nur Räume reellwertiger Funktionen. Für nicht ausdrücklich in dieser Arbeit eingeführte Funktionenräume verwenden wir die Bezeichnungsweisen von Adams [2].

3. Verallgemeinerte Sobolevräume

3.1. Nun führen wir mit Hilfe endlicher Multiindexmengen Hilberträume ein. Man sollte sich vorstellen, die Multiindexmenge A sei durch einen linearen Differentialoperator $A(\cdot,D)$ der Gestalt (1.5) gegeben. Es sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, dann sei

$$N(G) := \left\{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \,\middle|\, f(x) = 0 \text{ für alle } x \in G \right\}.$$

Dies ist ein linearer Unterraum des linearen Raumes $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nun definieren wir

$$C_*^\infty(G) := C_0^\infty(\mathbb{R}^N)/N(G) \quad \text{(Quotientenraum)}. \tag{3.1}$$

Die Elemente in $C_*^\infty(G)$ fassen wir als Funktionen auf G auf, da sie auf G (sogar auf $\overline{G}$) eindeutig bestimmt sind. Sie sind zusammen mit sämtlichen Ableitungen beschränkt auf $\overline{G}$ und nehmen eindeutige endliche Werte auf ∂G an.

3.2. Mit $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{0,G}$ bezeichnen wir die Norm von $L^2(G)$. Für eine endliche Multiindexmenge $A \subset \mathbb{N}_0^N$ und beliebiges $\varphi \in C_*^\infty(G)$ definieren wir die Norm

$$\|\varphi\|_{A,G} := \left\{ \sum_{\alpha \in A} \|\partial^\alpha \varphi\|_{0,G}^2 + \|\varphi\|_{0,G}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Es ist $\|\varphi\|_{A,G} < \infty$ für alle $\varphi \in C_*^\infty(G)$. Daß $\|\cdot\|_{A,G}$ eine Norm ist, ist

offensichtlich. Wenn keine Unklarheit bezüglich des betrachteten Gebietes besteht, schreiben wir auch $\|\cdot\|_A$.

Nun führen wir folgende lineare Räume ein:

$H^A(G)$ – die Vervollständigung von $C_*^\infty(G)$ bezüglich $\|\cdot\|_{A,G}$

und

$H_0^A(G)$ – die Vervollständigung von $C_0^\infty(G)$ bezüglich $\|\cdot\|_{A,G}$.

Lemma 3.1. *Die Räume* $H^A(G)$ *und* $H_0^A(G)$ *sind separable, reflexive Banachräume.*

Beweis: Sei $A = \{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(k)}\}$, $\alpha^{(i)} = (\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_N^{(i)})$ für $i = 1,\dots,k$. Die Einbettung

$$T: H^A(G) \longrightarrow \Big(\prod_1^k L^2(G)\Big) \times L^2(G), \qquad T(u) = (\partial^{\alpha^{(1)}}u,\dots,\partial^{\alpha^{(k)}}u, u), \tag{3.3}$$

für $u \in H^A(G)$, ist isometrisch, und das Bild ist abgeschlossen. Damit ist $H^A(G)$ separabel und reflexiv. Als abgeschlossener Unterraum hat $H_0^A(G)$ diese Eigenschaften auch. □

3.3. Für $\varphi,\psi \in C_*^\infty(G)$ führen wir die Bilinearform

$$<\varphi,\psi>_{A,G} = \sum_{\alpha\in A} \int_G \partial^\alpha\varphi\,\partial^\alpha\psi\,dx + \int_G \varphi\psi\,dx \tag{3.4}$$

ein. Wegen

$$\langle \varphi ; \varphi \rangle_{A,G} = \| \varphi \|^2_{A,G} \tag{3.5}$$

ist die Form positiv definit. Außerdem liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$| \langle \varphi , \psi \rangle_{A,G} | \leq \| \varphi \|_{A,G} \| \psi \|_{A,G} , \tag{3.6}$$

d.h. $\langle \cdot , \cdot \rangle_{A,G}$ ist auf $C^\infty_*(G)$ ein stetiges Skalarprodukt.

Lemma 3.2. *Die Räume $H^A(G)$ und $H^A_0(G)$ sind separable Hilberträume mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle_{A,G}$.*

Beweis: Aufgrund von (3.6) läßt sich $\langle \cdot , \cdot \rangle_{A,G}$ stetig auf $H^A(G)$ fortsetzen und (3.5) liefert die Behauptung. Wegen $C^\infty_0(G) \subset C^\infty_*(G)$ folgt die Behauptung für $H^A_0(G)$ analog. □

Bemerkung 3.3. 1) Gilt $A = \overline{(m)} = \{ \alpha \in \mathbb{N}_0^N \mid |\alpha| \leq m \}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ und genügt G einer Segmentbedingung (vgl. Adams [2], Abschnitt 3.17), so erhält man die klassischen Sobolev–Räume $H^{m,2}(G)$, $H^{m,2}_0(G)$ mit der Norm

$$\| w \|^2_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \| \partial^\alpha w \|^2_0$$

für alle $w \in H^{m,2}(G)$ (siehe Adams [2], Kapitel III).

2) Für spezielle Gebiete stimmen die Räume $H^A(G)$ mit den von Rákosník [26], [27] betrachteten Räumen $W^{E,\bar{p}}(G)$ für $E = A \cup \{0\}$, $\bar{p} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in E} \subset \mathbb{R}$

mit $p_\alpha = 2$ für alle $\alpha \in E$, überein (siehe Rákosník [26], Theorem 2 und Theorem 3). □

3.4. Die Elemente $v \in H^A(G)$ haben verallgemeinerte Ableitungen $\partial^\alpha v$, $\alpha \in A$, in $L^2(G)$. Denn sei $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_*^\infty(G)$ eine Folge mit $\psi_n \longrightarrow v$ bezüglich $\|\cdot\|_A$, dann konvergiert $(\partial^\alpha \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(G)$ gegen ein $v_\alpha \in L^2(G)$ für jedes $\alpha \in A$. Aufgrund der Eindeutigkeit der verallgemeinerten Ableitung folgt $v_\alpha = \partial^\alpha v$ (vgl. Adams [2], Abschnitt 1.57).

In den Räumen $H^A(G)$ gilt nicht unbedingt $\partial^\beta u \in L^2(G)$ für alle $\beta \leq \sigma, \sigma \in A$ und alle $u \in H^A(G)$. (Für $H_0^A(G)$ folgt dieses aus der Poincaré–Ungleichung (4.2)). Dies hat zur Folge, daß die Leibnizsche Produktregel nicht immer anwendbar ist.

4. Einbettungen für beschränkte Gebiete

4.1. In diesem Kapitel haben wir einige Abschätzungen zusammengefaßt, aus denen man Einbettungen für Funktionenräume gewinnen kann. Die Einbettungen wurden allerdings nur in den Fällen angegeben, in denen wir nicht noch weitere Räume einführen mußten. Aus Lemma 4.6. folgt eine kompakte Einbettung, wenn man die von Rákosník [26], [27] behandelten anisotropen Sobolevräume einführt. Für unsere Zwecke genügt die Aussage von Lemma 4.6.. Das Korollar 4.3 erlaubt, aus Relationen zwischen Multiindexmengen auf Relationen zwischen den von ihnen bestimmten Funktionenräumen zu schließen. Wir zeigen zuerst zwei Ungleichungen, aus denen wir anschließend stetige Einbettungen für die $H_0^A(G)$–Räume gewinnen werden.

Satz 4.1. *Es sei* $A \subset \mathbb{N}_0^N$, $A \neq \phi$, *eine endliche Multiindexmenge. Weiter sei* $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ *ein Multiindex, dann gilt* $\beta \in \text{konv} A$ *genau dann, wenn es eine Konstante* $C > 0$ *gibt mit*

$$\| \partial^\beta \varphi \|_{0,\mathbb{R}^N} \leq C \| \varphi \|_{A,\mathbb{R}^N} \tag{4.1}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Zum Beweis: Siehe Tafel [30], Satz (19.2). □

4.2. Weiterhin gilt folgende **Poincaré–Ungleichung**

Satz 4.2. *Sei G ein beschränktes Gebiet und $d \in \mathbb{R}^N$ mit $d_j := \sup\{ |x_j| \mid x = (x_1,...,x_N) \in G \}$, für $j = 1,...,N$. Weiter sei $A \subset \mathbb{N}_0^N$, $A \neq \phi$, eine endliche Multiindexmenge und $\alpha \in A$ ein Multiindex, dann gilt für jeden Multiindex $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ mit $\beta \leq \alpha$*

$$\| \partial^\beta u \|_0 \leq 2^{|\alpha-\beta|} d^{\alpha-\beta} \| \partial^\alpha u \|_0 \tag{4.2}$$

für alle $u \in H_0^A(G)$.

Beweis: Es folgt für $\varphi \in C_0^\infty(G)$ und $j \in \{1,...,N\}$ mit partieller Integration und der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\| \partial^\beta \varphi \|_0^2 = \int_G |\partial^\beta \varphi|^2 \, dx = -\int_G x_j \partial^{\varepsilon_j} |\partial^\beta \varphi|^2 \, dx$$

$$\leq 2 d_j \int_G |\partial^\beta \varphi| \, |\partial^{\beta+\varepsilon_j} \varphi| \, dx$$

$$\leq 2 d_j \Big(\int_G |\partial^\beta \varphi|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_G |\partial^{\beta+\varepsilon_j} \varphi|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 d_j \| \partial^\beta \varphi \|_0 \, \| \partial^{\beta+\varepsilon_j} \varphi \|_0 .$$

Man erhält

$$\| \partial^\beta \varphi \|_0 \leq 2 d_j \| \partial^{\beta+\varepsilon_j} \varphi \|_0 .$$

Die Ungleichung (4.2) folgt durch Iteration mit geeigneten ε_j. Da $C_0^\infty(G)$ in $H_0^A(G)$ dicht liegt, gilt (4.2) auch für alle $u \in H_0^A(G)$. □

Korollar 4.3. *Es sei G ein beschränktes Gebiet. Seien $A,B \subset \mathbb{N}_0^N$ endliche Multiindexmengen mit $B \subset \operatorname{konv}\bar{A}$, dann ist $H_0^A(G)$ stetig in $H_0^B(G)$ eingebettet. Darüberhinaus gilt $H_0^A(G) \cong H_0^{\operatorname{konv}\bar{A}}(G) \cong H_0^{\bar{A}}(G)$.*

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(G)$ beliebig gewählt. Dann liefern (4.1) und (4.2)

$$\|\varphi\|_B \le \|\varphi\|_{\operatorname{konv}\bar{A}} \le C' \|\varphi\|_{\bar{A}} \le \tilde{C} \|\varphi\|_A \le \tilde{C} \|\varphi\|_{\bar{A}} \le \tilde{C} \|\varphi\|_{\operatorname{konv}\bar{A}} \qquad (4.3)$$

für geeignet gewählte Konstanten $C', \tilde{C} > 0$. Hieraus folgen sofort die Behauptungen, da $C_0^\infty(G)$ in den obigen Räumen dicht liegt. □

Damit haben wir unter anderem ein hinreichendes Kriterium dafür, wann zwei endliche Multiindexmengen $A,B \subset \mathbb{N}_0^N$ den gleichen Raum $H_0^A(G) \cong H_0^B(G)$ erzeugen, nämlich wenn $\operatorname{konv}\bar{A} = \operatorname{konv}\bar{B}$ gilt.

4.3. Wir geben noch eine kompakte Einbettung für klassische Sobolevräume an. Wir benötigen aber nur den Fall des Rellichschen Auswahlsatzes, d.h. die kompakte Einbettung von $H_0^{1,2}(G)$ in den $L^2(G)$.

Satz 4.4. *Es sei G ein beschränktes Gebiet. Weiter seien $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Einbettung von $H_0^{m+k,2}(G)$ in $H_0^{m,2}(G)$ kompakt.*

Zum Beweis: Siehe Adams [2], Theorem 6.2 . □

Außerdem benötigen wir zum Beweis von Lemma 4.6. die folgende Ungleichung. Wir erinnern an die Notation $(\lambda) = \{ (\lambda_1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,\lambda_N) \}$.

Satz 4.5. (Sobolevsche Ungleichungen) *Das Gebiet* $G \subset \mathbb{R}^N$ *sei beschränkt. Weiterhin sei* $\lambda \in \mathbb{N}^N$ *gegeben. Für* $2 \le q < \infty$, *und* $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ *gelte*

$$\kappa := \left| \left(\gamma + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \mathbb{1} \right) : \lambda \right| \le 1. \tag{4.4}$$

Dann ist für alle $v \in H_0^{(\lambda)}(G)$

$$\partial^\gamma v \in L^q(G),$$

und es existieren Konstanten $h_0 = h_0(\gamma,q) > 0$, $C = C(\gamma,q) > 0$, *so daß gilt*

$$\| \partial^\gamma v \|_q \le C h^{1-\kappa} \sum_{\beta \in (\lambda)} \| \partial^\beta v \|_0 + C h^{-\kappa} \| v \|_0 \tag{4.5}$$

für alle $h \in (0, h_0)$; C *ist unabhängig von* v *und* h.

Zum Beweis: Da G beschränkt ist, gibt es einen Quader

$$Q(-b,b) := \{ x \in \mathbb{R}^N \mid -b_j < x_j < b_j \text{ für } j = 1,\dots,N \},$$

$b = (b_1,\dots,b_N) \in \mathbb{R}^N$, $b_j > 0$ für $j = 1,\dots N$, so daß $\overline{G} \subset Q(-b,b)$ ist. Seien alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$ auf $Q(-b,b)$ mit dem Wert Null fortgesetzt. Aufgrund von Theorem 10.2., in Besov, Il'in und Nikol'skiĭ [6], existiert eine Konstante $h_0 = h_0(\gamma,q) > 0$ derart, daß gilt

$$\| \partial^\gamma \varphi \|_{q,Q(-b,b)} \le C h^{1-\kappa} \sum_{\beta \in (\lambda)} \| \partial^\beta \varphi \|_{0,Q(-b,b)} + C h^{-\kappa} \| \varphi \|_{0,Q(-b,b)}$$

für alle $h \in (0,h_0)$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Da die Funktionen φ außerhalb von G verschwinden, gilt obige Ungleichung auch, wenn man $Q(-b,b)$ durch G

ersetzt. Weil $C_0^\infty(G)$ in $H_0^{(\lambda)}(G)$ dicht liegt, folgt (4.5). □

Es wird sich als nützlich erweisen, folgende Bezeichnungen einzuführen, dabei sei $\lambda \in \mathbb{N}^N$ gegeben,

$$K(\lambda) := \left\{ (\gamma,q) \in \mathbb{N}_0^N \times (2,\infty) \;\middle|\; \left| \gamma + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \mathbb{1} : \lambda \right| < 1 \right\} \tag{4.6}$$

und

$$B(\lambda) := \left\{ (\gamma,q) \in \mathbb{N}_0^N \times (2,\infty) \;\middle|\; \left| \gamma + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \mathbb{1} : \lambda \right| \leq 1 \right\}. \tag{4.7}$$

Es ist offensichtlich $K(\lambda) \subset B(\lambda)$. Man wähle in (4.5) ein $h \in (0,h_0)$ fest, dann gibt es zu $(\gamma,q) \in B(\lambda)$ eine Konstante $C(\gamma,q) > 0$, so daß gilt

$$\| \partial^\gamma u \|_q \leq C(\gamma,q) \| u \|_{(\lambda)} \tag{4.8}$$

für alle $u \in H_0^{(\lambda)}(G)$ (Man beachte (3.2).). Ist $(\gamma,q) \in B(\lambda)$ für ein $q > 2$, so ist $(\gamma,p) \in K(\lambda)$ für alle $p \in (2,q)$.

4.4. In Abschnitt 11.7. werden wir das folgende Lemma benötigen, das die Auswahl gewisser konvergenter Teilfolgen aus in $H_0^A(G)$ beschränkten Folgen ermöglicht. Wir erinnern an die Notation $(1) = \{ \alpha \in \mathbb{N}_0^N \mid |\alpha| = 1 \}$.

Lemma 4.6. *Sei G ein beschränktes Gebiet. Es sei A eine endliche Multiindexmenge mit der Eigenschaft $(1) \cup (\lambda) \subset \operatorname{konv} A$. Für jedes (feste) Paar (γ,q) mit $(\gamma,q) \in K(\lambda)$ (definiert gemäß (4.3)) gibt es zu jeder*

bezüglich $\|\cdot\|_A$ *beschränkten Folge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^A(G)$ *eine Teilfolge* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *derart, daß* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $L^2(G)$ *und* $(\partial^\gamma u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *in* $L^q(G)$ *konvergiert.*

Beweis: Es sei $(\gamma,q)\in K(\lambda)$, dann folgt aus (4.2), daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß gilt

$$\|\partial^\gamma u\|_q \le \varepsilon \|u\|_{(\lambda)} + C(\varepsilon)\|u\|_0 \tag{4.9}$$

für $u \in H_0^{(\lambda)}(G)$. Nach Korollar 4.4. gilt wegen $(1),(\lambda)\subset \operatorname{konv}\bar{A}$, daß Konstanten $C', C'' > 0$ existieren, so daß gilt

$$\|u\|_{(\lambda)} \le C'\|u\|_A, \quad \|u\|_{(1)} = \|u\|_{1,2} \le C''\|u\|_A \tag{4.10}$$

für alle $u \in H_0^A(G)$. In (4.9) erhalten wir damit

$$\|\partial^\gamma u\|_q \le \varepsilon C'\|u\|_A + C(\varepsilon)\|u\|_0 . \tag{4.11}$$

Nun sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^A(G)$ eine beschränkte Folge, ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\|u_n\|_A \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach der zweiten Ungleichung in (4.10) ist die Folge auch in $H_0^{1,2}(G)$ beschränkt, so daß gemäß Satz 4.4. eine in $L^2(G)$ konvergente Teilfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert. Andererseits erhalten wir für die Teilfolge gemäß (4.11)

$$\|\partial^\gamma(u_k - u_{k'})\|_q \le 2\varepsilon C' + C(\varepsilon)\|u_k - u_{k'}\|_0 . \tag{4.12}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2(G)$

konvergiert, kann die rechte Seite von (4.12) beliebig klein gemacht werden. Damit ist $(\partial^\gamma u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $L^q(G)$. □

5. Spursätze

5.1. Wir wollen jetzt eine Klasse von Gebieten G einführen, für die wir dann sogenannte Spuroperatoren auf dem einer Multiindexmenge A zugeordneten Raum $H^{\vec{A}}(G)$ definieren können. Diese Operatoren ermöglichen, obwohl das N–dimensionale Lebesgue–Maß von ∂G Null ist, das Verhalten der Elemente in $H^{\vec{A}}(G)$ auf dem Rande von G zu charakterisieren. Dazu ist es üblich, den Rand von G als Mannigfaltigkeit mit einer gewissen Glätte vorauszusetzen (siehe Showalter [29], II.3.). Für den hier gewählten Zugang reicht die Stetigkeit des Randes. Dafür sind allerdings andere Einschränkungen an die Klasse der Gebiete nötig.

Sei $j \in \{1,\dots,N\}$ und $p_j : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ die Projektion

$$p_j(x_1,\dots,x_N) = (x_1,\dots,x_{j-1},0,x_{j+1},\dots,x_N).$$

Wir nennen ein Gebiet G ein **j–Gebiet**, wenn G beschränkt ist und ∂G folgende Eigenschaft hat:

Sei $G_j := p_j(G)$. *Es gelte* $\partial G = M_j \cup N_j \cup P_j$ *und es gebe stetige Funktionen* $f_j, g_j : \overline{G}_j \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_j(x') < f_j(x')$, $x' \in \overline{G}_j$, *so daß gilt*

$$M_j = \{\, x \in \mathbb{R}^N \mid x = (x_1,\dots,x_{j-1},f_j(x'),x_{j+1},\dots,x_N),\ x' = p_j(x) \in G_j \,\}, \qquad (5.1)$$

$$N_j = \{\, x \in \mathbb{R}^N \mid x = (x_1,\dots,x_{j-1},g_j(x'),x_{j+1},\dots,x_N),\ x' = p_j(x) \in G_j \,\}. \qquad (5.2)$$

Weiterhin gelte $p_j(P_j) \subset \partial G_j$. □

(vgl. Nikol'skiĭ [23] oder Rákosník [26], Definition 2, die hier gegebene Definition ist ein wenig allgemeiner).

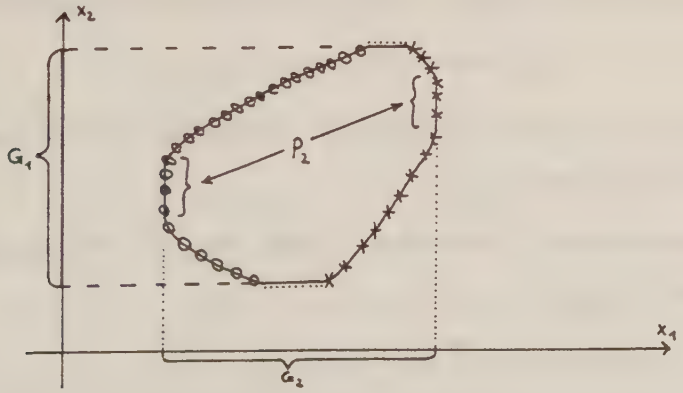
Wir nennen G ein **R–Gebiet**, wenn G ein j–Gebiet für alle $j = 1, \dots, N$ ist.

Bemerkung 5.1. 1) Der Quader $Q(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}^N$, $a < b$,

$$Q(a,b) := \{ x \in \mathbb{R}^N \mid a_j < x_j < b_j \text{ für } j = 1,\dots,N \} \tag{5.3}$$

ist ein R–Gebiet.

2) Die Bedingung $g_j(x') < f_j(x')$ für $x' \in \bar{G}_j$ erzwingt, daß P_j eine gewisse "Breite" hat. Damit ist eine Kugel zum Beispiel kein R–Gebiet. □



Beispiel für ein R–Gebiet, N = 2, j = 1, M_1–⋆⋆⋆, N_1–●●●, P_1–⋯⋯.

5.2. Wir wollen jetzt auf den Rändern von R–Gebieten einen Integralbegriff einführen. Daher sei ein R–Gebiet G gegeben. Auf der Hyperfläche $M_j \subset \mathbb{R}^N$, die sich als Graph einer stetigen Funktion $f_j : G_j \longrightarrow \mathbb{R}$, $G_j \subset p_j(\mathbb{R}^N)$ für ein $j \in \{1, \dots, N\}$, darstellen läßt, betrachten wir die durch die Bijektion

$$i : G_j \longrightarrow M_j , \qquad i(x') = (x_1, \dots, x_{j-1}, f(x'), x_{j+1}, \dots, x_N),$$

$x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_N)$, definierten meßbaren Mengen und das durch das (N-1)–dimensionale Lebesgue–Maß induzierte Bildmaß μ_j (vgl. Bauer [5], § 7.). Wir definieren für meßbare Funktionen u auf M_j die Norm

$$\begin{aligned} \| u \|^2_{\mathcal{L}^2(M_j)} &:= \int_{M_j} | u |^2 \, d\mu_j \\ &= \int_{G_j} | u(x_1, \dots, x_{j-1}, f(x'), x_{j+1}, \dots, x_N) |^2 \, dx' . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nun erhalten wir die Klassen $\mathcal{L}^2(M_j)$ als die Menge der Äquivalenzklassen von

$$\{ u : M_j \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ ist meßbar}, \ \| u \|_{\mathcal{L}^2(M_j)} < \infty \},$$

modulo der außerhalb von Nullmengen verschwindenden Funktionen (vgl. Nikol'skiĭ [23], Rákosník [27]).

Bemerkung 5.2. 1) Die Klassen $\mathcal{L}^2(M_j)$ bilden einen Hilbertraum (siehe Bauer [5], § 15.).

2) Der Operator $i^* : \mathcal{L}^2(M_j) \longrightarrow L^2(G_j)$,

$$u(x) \longrightarrow v(x_1,\dots,x_{j-1},0,x_{j+1},\dots,x_N) = u(x_1,\dots,x_{j-1},f(x'),x_{j+1},\dots,x_N),$$

$(x' = (x_1,\dots,x_{j-1},0,x_{j+1},\dots,x_N))$ ist ein isometrischer Isomorphismus. □

Für die Hyperfläche N_j erhält man analog den Hilbertraum $\mathcal{L}^2(N_j)$.

5.3. Nun führen wir Spuroperatoren ein:

Satz 5.3. *Sei* $A \subset \mathbb{N}_0^N$, $A \neq \phi$, *eine endliche Multiindexmenge und* G *ein* R*-Gebiet, mit* M_j, N_j *definiert gemäß* (5.1), (5.2) *für* $j = 1,\dots,N$. *Sei* $\alpha \in \bar{A}$ *ein Multiindex mit* $\alpha + \varepsilon_j \in \bar{A}$, *für ein (festes)* $j \in \{1,\dots,N\}$, *dann existiert ein stetiger linearer Operator* $\gamma_{\alpha,j} : H^{\bar{A}}(G) \longrightarrow \mathcal{L}^2(M_j) \times \mathcal{L}^2(N_j)$ *mit*

$$\gamma_{\alpha,j}(u) := \left(\partial^\alpha u\,|_{M_j}, \partial^\alpha u\,|_{N_j}\right) \tag{5.5}$$

für alle $u \in C_*^\infty(G)$.

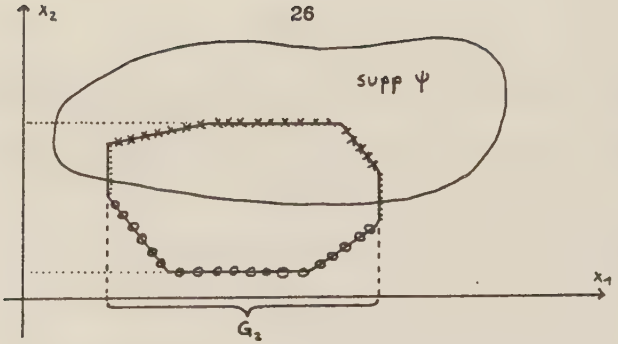
Beweis: Da $C_*^\infty(G)$ in $H^{\bar{A}}(G)$ dicht liegt, reicht es, die Operatoren auf $C_*^\infty(G)$ zu betrachten. Sei $\varphi \in C_*^\infty(G)$ beliebig, dann gilt

$$\|\left(\partial^\alpha \varphi|_{M_j}, \partial^\alpha \varphi|_{N_j}\right)\|^2_{\mathcal{L}^2(M_j)\times\mathcal{L}^2(N_j)} = \|\partial^\alpha \varphi|_{M_j}\|^2_{\mathcal{L}^2(M_j)} + \|\partial^\alpha \varphi|_{N_j}\|^2_{\mathcal{L}^2(N_j)}.$$

Weiter wählen wir ein $\psi \in C_*^\infty(G)$, mit den Eigenschaften

$$\operatorname{supp}\psi \subset \mathbb{R}^N - \{x \in \mathbb{R}^N \mid x' = p_j(x) \in \bar{G}_j \text{ und } x_j \leq g_j(x')\}, \tag{5.6}$$

und $\psi(x) = 1$ in einer Umgebung von M_j. Es sei C eine Konstante mit $|\partial^\beta \psi(x)| \leq C$ für alle $\beta \in \bar{A}$ und alle $x \in G$. Wir identifizieren ψ mit der zu ψ gehörigen Äquivalenzklasse in $C_*^\infty(G)$. Offensichtlich liegt $\eta := \psi\varphi$ in



Skizze für $N = 2$, $j = 2$ zu (5.6), M_2–⋆⋆⋆, N_2–○○○, P_2–⌒⌒⌒.

$C_0^\infty(G)$ und es gilt

$$\| \eta \|^2_{\bar{\lambda},G} = \sum_{\beta \in \bar{\lambda}} \int_G | \partial^\beta (\psi(x)\varphi(x)) |^2 \, dx + \| \psi \varphi \|^2_0$$

$$\leq \sum_{\beta \in \bar{\lambda}} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \int_G | \partial^{\beta-\gamma} \psi(x) \partial^\gamma \varphi(x) |^2 \, dx + \| \psi \varphi \|^2_0$$

$$\leq \sum_{\beta \in \bar{\lambda}} \sum_{\gamma \leq \beta} C \binom{\beta}{\gamma} \int_G | \partial^{\beta-\gamma} \varphi(x) |^2 \, dx + \| \psi \varphi \|^2_0 \qquad (5.7)$$

$$\leq (\tilde{C})^2 \| \varphi \|^2_{\bar{\lambda},G}$$

für eine geeignete Konstante $\tilde{C}$. Wegen (5.6) ist $\partial^\alpha \eta \big|_{N_j}(x) = 0$ und es gilt mit $2ab \leq a^2 + b^2$, für $a,b \in \mathbb{R}$, sowie $x' = (x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_N)$

$$\left(\partial^\alpha \eta (x_1,\ldots,x_{j-1},f(x'),x_{j+1},\ldots,x_N) \right)^2 = \int_{g_j(x')}^{f_j(x')} \partial^{e_j} \left(\partial^\alpha \eta (x_1,\ldots,x_{j-1},s,x_{j+1},\ldots,x_N) \right)^2 ds$$

$$\leq 2 \int_{g_j(x')}^{f_j(x')} | \partial^\alpha \eta(x_1,\ldots,s,\ldots,x_N) | \, | \partial^{\alpha+\varepsilon_j} \eta(x_1,\ldots,s,\ldots,x_N) | \, ds$$

$$\leq \int_{g_j(x')}^{f_j(x')} \left(| \partial^\alpha \eta(x_1,\ldots,s,\ldots,x_N) |^2 + | \partial^{\alpha+\varepsilon_j} \eta(x_1,\ldots,s,\ldots,x_N) |^2 \right) ds .$$

Jetzt integrieren wir über G_j und erhalten

$$\int_{G_j} | \partial^\alpha \eta(x_1,\ldots,f(x'),\ldots,x_N) |^2 \, dx' \leq \int_G | \partial^\alpha \eta(x) |^2 + | \partial^{\alpha+\varepsilon_j} \eta(x) |^2 \, dx$$

$$\leq \| \eta \|^2_{\bar{A},G} ,$$

d.h. $\| \partial^\alpha \eta \|_{L^2(M_j)} \leq \| \eta \|_{\bar{A},G}$. Wegen $\psi(x) = 1$ in einer Umgebung von M_j, folgt zusammen mit (5.7)

$$\| \partial^\alpha \varphi \|_{L^2(M_j)} \leq \| \eta \|_{\bar{A},G} \leq \tilde{C} \| \varphi \|_{\bar{A},G} \tag{5.8}$$

mit $\tilde{C}$ unabhängig von φ. Analog schätzt man $\| \partial^\alpha \varphi \|_{L^2(N_j)}$ ab. □

5.4. Daß die Funktionen in $H_0^A(G)$ für jede endliche Multiindexmenge A homogenen Randbedingungen genügen, ergibt sich aus dem folgenden

Korollar 5.4. *Sei* $A \subset \mathbb{N}_0^N$, $A \neq \phi$, *eine endliche Multiindexmenge, und* G *ein* R*-Gebiet. Ist* $u \in H_0^A(G)$ $(\cong H_0^{\bar{A}}(G))$, *dann gilt* $\gamma_{\alpha,j}(u) = 0$ *für alle* $\alpha \in \bar{A}$ *und* $j \in \{1,\ldots,N\}$, *für die* $\alpha + \varepsilon_j \in \bar{A}$ *ist.*

Beweis: Aufgrund von Korollar 4.4. gilt $H_0^A(G) \cong H_0^{\bar{A}}(G)$. Sei $u \in H_0^A(G)$ und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(G)$ eine Folge mit $\varphi_n \longrightarrow u$ bezüglich der Norm $\| \cdot \|_A$, so

folgt aus der Stetigkeit von $\gamma_{a,j}$

$$\gamma_{a,j}(u) = \lim_{n \to \infty} \gamma_{a,j}(\varphi_n) = 0.$$

□

Zur Umkehrung des Korollars siehe Rákosník [27], Lemma 6.

6. Die Palais–Smale–Bedingung und das 'Mountain Pass'–Lemma

6.1. Als Vorbereitung für das "Mountain Pass"-Lemma, Satz 6.3., benötigen wir einige Begriffe aus der nichtlinearen Funktionalanalysis. Unter anderem formulieren wir die in dieser Arbeit benötigte Version einer Palais–Smale–Bedingung. Es seien X, Y Banachräume über $\mathbb{R}$, mit den Normen $\|\cdot\|_X$ bzw. $\|\cdot\|_Y$. Ihre Dualräume bezeichnen wir mit X' bzw. Y'. Mit $L(X,Y)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen linearen Operatoren von X nach Y.

Ein Operator $F(\cdot): D \longrightarrow Y$, $D \subset X$ offen, heißt im Punkt $x \in D$ **Fréchet–differenzierbar**, wenn ein Operator $F'(x) \in L(X,Y)$ existiert, so daß

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(x+h) - F(x) - F'(x)h}{\|h\|_X} = 0 \tag{6.1}$$

für $h \in X$ mit $x+h \in D$ ist. Gilt dieses für jedes $x \in D$, so sagen wir $F(\cdot)$ sei **auf** D **Fréchet–differenzierbar.** Gilt darüberhinaus, daß $F'(\cdot): D \longrightarrow L(X,Y)$ stetig ist, so sagen wir $F(\cdot)$ ist **stetig Fréchet–differenzierbar.**

Bemerkung 6.1. Ist $X = H$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, sowie $Y = \mathbb{R}$, d.h. $F'(\cdot): D \longrightarrow H'$, dann gilt aufgrund des Fréchet–Rieszschen Darstellungssatzes für alle $h \in H$

$$F'(x)\, h = \langle w, h \rangle_H \tag{6.2}$$

mit einem eindeutig bestimmten $w \in H$. Daher bezeichnen wir im Folgenden auch w als $F'(x)$. □

6.2. Ein Operator $F(\cdot): D \longrightarrow Y$, $D \subset X$ offen, heißt im Punkt $x \in D$ **Gâteaux–differenzierbar**, wenn ein Operator $VF(x) \in L(X,Y)$ existiert, so daß

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{F(x+th) - F(x) - t\, VF(x)h}{t} = 0 \tag{6.3}$$

für $t \in \mathbb{R}$, $h \in X$ mit $x+th \in D$ ist. Gilt dieses für jedes $x \in D$ so sagen wir $F(\cdot)$ sei **auf** D **Gâteaux–differenzierbar.** Ist $F(\cdot)$ Fréchet–differenzierbar, so ist $F(\cdot)$ auch Gâteaux–differenzierbar und umgekehrt gilt:

Satz 6.2. *Sei $F(\cdot): D \longrightarrow Y$ Gâteaux–differenzierbar auf D und gelte, daß $VF(\cdot): D \longrightarrow L(X,Y)$ stetig ist, so ist $F(\cdot)$ auf D Fréchet–differenzierbar und $F'(\cdot) = VF(\cdot)$.*

Zum Beweis: Siehe Vainberg [33], Theorem 3.3. □

6.3. Es sei $F(\cdot): X \longrightarrow \mathbb{R}$ ein stetig Fréchet–differenzierbares Funktional. Wir formulieren für $F(\cdot)$ die

Palais–Smale–Bedingung ((PS)–Bedingung). *Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $|F(x_k)| \leq M$, für eine Konstante $M > 0$, und $F'(x_k) \longrightarrow 0$ in der X' – Norm, dann habe $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.* □

(Man vergleiche Ambrosetti und Rabinowitz [3], Nirenberg [25]; condition (C) bei Aubin und Ekeland [4] ist schwächer als die (PS)–Bedingung.)

6.4. Wir sagen $c \in \mathbb{R}$ ist ein **kritischer Wert** des Funktionals $F(\cdot)$, wenn ein $w \in X$ existiert mit $F(w) = c$ und $F'(w)=0$; wir nennen solch ein Element w einen **kritischen Punkt** von $F(\cdot)$.

6.5. Ein wesentliches Hilfsmittel für den weiter unten folgenden Existenzsatz, Satz 12.1., ist:

Satz 6.3. ("Mountain Pass"-Lemma.) *Sei X ein Banachraum und $F(\cdot)$ sei ein stetig Fréchet–differenzierbares Funktional, das der* (PS)*–Bedingung genügt. Es gebe eine Sphäre $S(R) = \{ x \in X \mid \|x\|_X = R \}$ und es existiere außerdem ein Punkt $x_1 \in X$ mit $\|x_1\|_X > R$, so daß die Relationen*

$$\max\{ F(0), F(x_1) \} < c_0 := \inf_{x \in S(R)} F(x) \tag{6.4}$$

für ein $c_0 \in \mathbb{R}$ gelten, so hat F einen kritischen Punkt $x' \in X$.

Zum Beweis: Siehe Aubin und Ekeland [4], Chapter 5, Section 5, Theorem 5. Die von uns für $F(\cdot)$ gemachten Voraussetzungen sind etwas einschränkender als bei Aubin und Ekeland. □

6.6. Die Menge der stetigen Wege γ über $I=[0,1]$ mit $\gamma(0)=0$ und $\gamma(1)=x_1$ bezeichnen wir mit P. Ist $\gamma \in P$, dann ist $\gamma(I)$ als Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend und folglich $\gamma(I) \cap S(R) \neq \phi$. Sei $y \in \gamma(I) \cap S(R)$, dann gilt wegen (6.4)

$$c_0 \leq F(y) \leq \max_{x \in \gamma(I)} F(x). \tag{6.5}$$

Wir setzen

$$c := \inf_{\gamma \in P} \max_{x \in \gamma(I)} F(x), \tag{6.6}$$

so folgt $c_0 \leq c$. Aus dem Beweis von Satz 6.3. (siehe Aubin und Ekeland [4], Ambrosetti und Rabinowitz [3]) ergibt sich das

Korollar 6.4. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 6.3. *hat das Funktional* $F(\cdot)$ *den kritischen Wert* c, *definiert durch* (6.6). *Es ist* $F(0) \neq c$, $F(x_1) \neq c$ □

Bemerkung 6.5. Satz 6.3. und Korollar 6.4. entsprechen im wesentlichen dem Theorem 2.1. in Ambrosetti und Rabinowitz [3] bzw. dem "Mountain Pass Lemma" bei Nirenberg [25]. □

7. Lineare Differentialoperatoren

7.1. In diesem Kapitel werden die linearen Differentialoperatoren eingeführt, die in den Kapiteln 9 - 12 betrachtet werden. Die in Abschnitt 7.1. gestellten Forderungen gelten für die gesamte Arbeit. Es sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und $A \subset \mathbb{N}_0^N$ eine endliche Multiindexmenge. Weiterhin habe A die Eigenschaft, daß gilt $\varepsilon_j \in \bar{A}$ für $j = 1,\dots,N$. Wir betrachten **lineare Differentialoperatoren** der Gestalt

$$A(\cdot,D) = \sum_{\alpha,\beta \in A} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha a_{\alpha\beta}(\cdot)\, \partial^\beta \tag{7.1}$$

mit Koeffizienten $a_{\alpha\beta} : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $a_{\alpha\beta} \in C^m(\bar{G})$, $m \geq |\alpha|$. Es gebe $\alpha,\beta \in A$ mit $|\alpha| = |\beta| = |A|$ und $a_{\alpha\beta} \neq 0$, d.h. $A(\cdot,D)$ habe die Ordnung $2|A|$. Außerdem gelte $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ für alle $\alpha,\beta \in A$. Wir ordnen dem Operator $A(\cdot,D)$ die Hilberträume $H_0^A(G)$ und $H^A(G)$ mit der gemäß (3.2) definierten Norm $\|\cdot\|_A$, zu (siehe Kapitel 3).

7.2. Weiter definieren wir die zu $A(\cdot,D)$ gehörige **Bilinearform**

$$A[\varphi,\psi] := \sum_{\alpha,\beta \in A} \int_G a_{\alpha\beta}(x)\, \partial^\beta \varphi\, \partial^\alpha \psi \; dx \tag{7.2}$$

für $\varphi,\psi \in C_*^\infty(G)$. Wir setzen $\tilde{C} := \sup_{\substack{x \in G \\ \alpha,\beta \in A}} |a_{\alpha,\beta}(x)| < \infty$, da die Funktionen $a_{\alpha\beta}$ auf G beschränkt sind. Mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung folgt

$$
\begin{aligned}
A[\varphi,\psi] &\le \sum_{\alpha,\beta\in A} \int_G |a_{\alpha\beta}(x)\,\partial^\beta\varphi(x)\,\partial^\alpha\psi(x)|\,dx \\
&\le \tilde{C} \sum_{\alpha,\beta\in A} \|\partial^\beta\varphi\|_{0,G}\,\|\partial^\alpha\psi\|_{0,G} \\
&\le C_2\,\|\varphi\|_A\,\|\psi\|_A,
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

mit einer geeigneten Konstante $C_2 > 0$. Somit ist die Bilinearform stetig und wir können sie auf ganz $H^A(G)$ fortsetzen.

7.3. Wir sagen $A(\cdot,D)$ ist **$H_0^A(G)$–elliptisch**, wenn eine Konstante $C_0\in\mathbb{R}$, $C_0 > 0$, existiert, derart daß gilt

$$A[u,u] \ge C_0\,\|u\|_A^2 \tag{7.4}$$

für alle $u\in H_0^A(G)$.

Bemerkung 7.1. Ist $A \neq \phi$ eine endliche Multiindexmenge, so sind zum Beispiel die Differentialoperatoren

$$A(D) = \sum_{\alpha\in A} (-1)^{|\alpha|}\,a_\alpha\,\partial^{2\alpha}$$

mit $a_\alpha\in\mathbb{R}$, $a_\alpha > 0$, $H_0^A(G)$–elliptisch, was unmittelbar mit Hilfe der Poincaré–Ungleichung (4.2) folgt. □

8. Nemytskiĭ– Operatoren

8.1. In diesem Kapitel wird eine Klasse nichtlinearer Operatoren eingeführt. Wir werden in den weiteren Kapiteln noch zusätzliche Bedingungen an die nichtlinearen Operatoren stellen. Es sei $b : \bar{G} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die der **Carathéodory-Bedingung** genügt

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad b(x,\cdot) \quad \textit{ist stetig für fast alle} \quad x \in \bar{G} \\ &\text{(b)} \quad b(\cdot,t) \quad \textit{ist meßbar für alle} \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Ist $\mu : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, dann ist aufgrund der Carathéodory-Bedingung $b(\cdot,\mu(\cdot)) : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar (siehe Vainberg [33], § 18).

8.2. Sei $\Psi(\bar{G}) := \{ \mu : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ meßbar} \}$, dann definieren wir zu der Funktion b den zugehörigen **Nemytskiĭ-Operator** $\tilde{B}(\cdot) : \Psi(\bar{G}) \longrightarrow \Psi(\bar{G})$ durch

$$\mu \longrightarrow \tilde{B}(\mu) = b(\cdot,\mu(\cdot)). \tag{8.2}$$

für alle $\mu \in \Psi(\bar{G})$. Für die $L^p(G)$–Räume gilt folgende Abbildungseigenschaft der Nemytskiĭ–Operatoren:

Satz 8.1. *Es seien* $\infty > p, q \geq 1$, *dann ist* $\tilde{B}(v) \in L^q(G)$ *für alle* $v \in L^p(G)$ *genau dann, wenn eine Funktion* $a \in L^q(G)$ *und eine Konstante* $d \geq 0$ *existieren, so daß gilt*

$$| b(x,t) | \leq a(x) + d \, | t |^r, \quad r = \frac{p}{q} \tag{8.3}$$

für alle $(x,t) \in \bar{G} \times \mathbb{R}$. *Darüberhinaus ist der Operator*

$\tilde{B}(\cdot): L^p(G) \longrightarrow L^q(G)$ *dann auch stetig und beschränkt (d.h. er bildet beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.).*

Zum Beweis: Siehe Vainberg [33], Theorem 19.1. . □

9. Verallgemeinerte Randwertaufgaben

9.1. Wir wollen nun ein verallgemeinertes Randwertproblem für semilineare nicht notwendigerweise elliptische Differentialoperatoren in Divergenzform auf einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ formulieren. Sei wie in Abschnitt 7.1.

$$A(\cdot, D) = \sum_{\alpha,\beta \in A} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha a_{\alpha\beta}(\cdot)\, \partial^\beta$$

ein linearer Differentialoperator der Ordnung $2|A|$, mit $a_{\alpha\beta} \in C^m(\bar{G})$, $m \geq |\alpha|$ und $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ für alle $\alpha, \beta \in A$. Weiterhin sei $\gamma \in \text{konv}(A)$ ein Multiindex mit der Eigenschaft, daß $\partial^\gamma u \in L^q(G)$ für ein $q \in [1, \infty)$ und alle $u \in H_0^A(G)$ gilt. Es sei weiterhin eine Funktion $b : \bar{G} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die der Carathéodory–Bedingung genügt und deren zugehöriger Nemytskiĭ–Operator $\tilde{B}(\cdot)$ die Bedingung $\tilde{B}(w) \in L^{q'}(G)$, $q' = \frac{q}{q-1}$ für alle $w \in L^q(G)$ erfüllt (man vergleiche Satz 8.1.). Dann definieren wir die Form

$$B[u, \varphi] := \int_G \tilde{B}(\partial^\gamma u)\, \partial^\gamma \varphi \, dx \qquad (9.1)$$

für $u \in H_0^A(G)$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

9.2. Unter diesen Vorrausstzungen formulieren wir das

Problem D. (Verallgemeinertes homogenes Dirichlet–Problem mit verallgemeinerten homogenen Randdaten). *Gesucht sei ein* $u \in H_0^A(G)$, *so daß gilt*

$$A[u,\varphi] - B[u,\varphi] = 0 \tag{9.2}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. □

Bemerkung 9.1. Haben wir ein solches $u \in H_0^{\mathrm{A}}(G)$ gefunden und gilt darüberhinaus, daß $a_{\alpha\beta}(\cdot)\,\partial^\beta u \,(\in L^1_{\mathrm{loc}}(G))$ und $\tilde{B}(\partial^\gamma u)\,(\in L^1_{\mathrm{loc}}(G))$ die schwachen Ableitungen $\partial^\alpha(a_{\alpha\beta}(\cdot)\,\partial^\beta u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ bzw. $\partial^\gamma \tilde{B}(\partial^\gamma u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ für alle $\alpha,\beta \in \mathrm{A}$ bzw. für $\gamma \in \mathrm{konv}(\bar{\mathrm{A}})$ besitzen (siehe Adams [2], 1.57), dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$A(x,D)u - (-1)^{|\gamma|}\,\partial^\gamma \tilde{B}(\partial^\gamma u) = 0 \tag{9.3}$$

fast überall in G (siehe Triebel [32], Lemma 8.1.). □

Bemerkung 9.2. Sind u und b genügend glatt, etwa $u \in C^m(\bar{G})$, $m \geq 2\,|\mathrm{A}|$, $b \in C^r(\bar{G}\times\mathbb{R})$, $r \geq |\gamma|$, dann ist u eine klassische Lösung der Gleichung (9.3). Falls G außerdem ein R–Gebiet ist, nimmt die Funktion u die Randdaten

$$\partial^\beta u\big|_{M_j \cup N_j} = 0$$

für alle $\beta \in \bar{\mathrm{A}}$ und $j \in \{1,\dots,N\}$ mit $\beta + \varepsilon_j \in \bar{\mathrm{A}}$ an (siehe Kapitel 5.). □

10. Fréchet–differenzierbare Funktionale

10.1. Um das "Mountain Pass"-Lemma, Satz 6.3., anwenden zu können, müssen wir ein Fréchet–differenzierbares Funktional haben. Dafür wird die Bedingung (E1) hinreichend sein. Anschließend nutzen wir die Fréchet–Differenzierbarkeit aus, um ein Lemma zu zeigen, das wir weiter unten im Beweis des Existenzsatzes, Satz 12.1., benötigen.

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und

$$A(\cdot,D) = \sum_{\alpha,\beta \in A} (-1)^{\cdot} \partial^{\alpha} a_{\alpha\beta}(\cdot)\, \partial^{\beta}$$

ein linearer Differentialoperator mit zugehöriger endlicher Multiindexmenge $A \subset \mathbb{N}_0^N$. Der Operator erfülle die in Abschnitt 7.1. genannten Voraussetzungen. Dem Operator $A(\cdot,D)$ ist gemäß Abschnitt 7.2. die stetige Bilinearform

$$A[u,v] = \sum_{\alpha,\beta \in A} \int_G a_{\alpha\beta}(x)\, \partial^{\beta} u\, \partial^{\alpha} v \; dx$$

für $u,v \in H^A(G)$ zugeordnet. Aufgrund der in Abschnitt 7.1. an die Multiindexmenge A gestellten Bedingungen gibt es ein $\lambda \in \mathbb{N}^N$ mit

$$(\lambda) = \{(\lambda_1,0,\ldots,0), \cdots, (0,\ldots,0,\lambda_N)\} \subset \bar{A}; \qquad (10.1)$$

dies gilt zumindest für $\lambda = (1,\ldots,1)$.

Bemerkung 10.1. Da $(\lambda) \subset \bar{A}$ ist, folgt aus Korollar 4.3., daß $H_0^A(G)$ stetig in $H_0^{(\lambda)}(G)$ eingebettet ist. Ist weiterhin $(\gamma,q) \in B(\lambda)$ (vgl. (4.7)), dann gibt es wegen (4.8) und (4.3) Konstanten $C'(\gamma,q)$ und $C(\gamma,q)$, so daß

$$\| \partial^\gamma u \|_q \leq C'(\gamma,q) \| u \|_{(\lambda)} \leq C(\gamma,q) \| u \|_A \tag{10.2}$$

für alle $u \in H_0^A(G)$ ist. □

10.2. Wir formulieren jetzt die erste Bedingung an die zu betrachtenden Nichtlinearitäten. Dafür sei $b : \bar{G} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Bedingung (E1) *Zu der stetigen Funktion* $b : \bar{G} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *gebe es ein* $q \in (2,\infty)$ *und Konstanten* $a, d > 0$ *derart, daß gilt*

$$| b(x,t) | \leq a + d |t|^{q-1} \tag{10.3}$$

für alle $(x,t) \in \bar{G} \times \mathbb{R}$. □

Bemerkung 10.2. Es sei $s(x,t) = \int_0^t b(x,s)\, ds$ eine Stammfunktion bezüglich t der Funktion b. Es ist $s(x,\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ für alle $x \in \bar{G}$. Aus (10.3) folgt

$$|s(x,t)| = \left| \int_0^t b(x,s)\, ds \right| \leq \left| \int_0^t a\, ds \right| + d \left| \int_0^t |s|^{q-1}\, ds \right|$$

$$= a|t| + \frac{d}{q}|t|^q \leq \frac{q-1}{q} a^{\frac{q}{q-1}} + \frac{d+1}{q}|t|^q \tag{10.4}$$

$$= a' + d'|t|^q$$

mit $a' = \frac{q-1}{q} a^{\frac{q}{q-1}}$, $d' = \frac{d+1}{q}$, für alle $x \in \bar{G}$, $t \in \mathbb{R}$. □

10.3. Wir bezeichnen einen stetigen Operator $F(\cdot): X \longrightarrow Y$, X, Y seien Banachräume, als **vollstetig** (oder **kompakt**), wenn das Bild jeder beschränkten Folge in X eine in Y konvergente Teilfolge enthält. Unter der Voraussetzung an die endliche Multiindexmenge A, daß ein festes $\lambda \in \mathbb{N}^N$ mit $(\lambda) \subset \bar{A}$ existiert, erhalten wir folgendes

Lemma 10.3. *Seien das Gebiet G beschränkt und $(\gamma, q) \in K(\lambda)$ (siehe (4.6)). Erfüllt die stetige Abbildung $b: \bar{G} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Bedingung* (E1), *so folgt*

(a) *Der Operator $\eta: H_0^A(G) \longrightarrow L^q(G)$, gegeben durch $u \longrightarrow \eta(u) = \partial^\gamma u$, ist linear und vollstetig (kompakt).*

(b) *Der Nemytskiĭ-Operator $\tilde{B}(\cdot): L^q(G) \longrightarrow L^{q'}(G)$, $q' = \frac{q}{q-1}$, definiert durch $v \longrightarrow \tilde{B}(v) = b(\cdot, v)$, ist auf ganz $L^q(G)$ definiert, stetig und beschränkt. Es ist $\tilde{B}(v) w \in L^1(G)$ für $v, w \in L^q(G)$.*

(c) *Der Nemytskiĭ-Operator $\tilde{S}(\cdot): L^q(G) \longrightarrow L^1(G)$, definiert durch $v \longrightarrow \tilde{S}(v) = s(\cdot, v)$, ist auf ganz $L^q(G)$ definiert, stetig und beschränkt.*

Beweis: (a) Die Linearität ist offensichtlich und die Vollstetigkeit folgt (wegen $(\gamma, q) \in K(\lambda)$) aus Lemma 4.6. .

(b) Da $b \in C(\bar{G} \times \mathbb{R})$ trivialerweise der Carathéodory–Bedingung (8.1) genügt, folgt die erste Aussage über $\tilde{B}(\cdot)$ aus Satz 8.1., da $\frac{q}{q'} = q-1$ ist. Weiterhin folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\int_G | \tilde{B}(v)w | \, dx \leq \| \tilde{B}(v) \|_{q'} \, \| w \|_q$$

für $v, w \in L^q(G)$, d.h. $\tilde{B}(v)w \in L^1(G)$.

(c) Die Aussage für $\tilde{S}$ folgt wegen Bemerkung 10.2. analog. □

Weiterhin erhalten wir das

Korollar 10.4. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 10.3. *sind die Nemytskiĭ-Operatoren*

$$B(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L^{q'}(G), \quad v \longrightarrow B(v) := \tilde{B} \circ \eta(v) = b(\cdot, \partial^\gamma v(\cdot)) \tag{10.5}$$

bzw.

$$S(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L^1(G), \quad v \longrightarrow S(v) := \tilde{S} \circ \eta(v) = s(\cdot, \partial^\gamma v(\cdot)) \tag{10.6}$$

$v \in H_0^A(G)$ *vollstetig und beschränkt.*

Beweis: Die Aussage des Korollars folgt erstens daraus, daß die Komposition eines stetigen Operators mit einem vollstetigen Operator wiederum vollstetig ist. Zweitens ist die Komposition beschränkter Operatoren wieder ein

beschränkter Operator (bei linearen Operatoren sind bekanntlich die Stetigkeit und Beschränktheit äquivalent). □

10.4. Wir definieren jetzt mit Hilfe des durch (10.6) gegebenen Operators $S(\cdot)$ und mit der durch (7.2) gegebenen Bilinearform $A[\cdot,\cdot]$ das nichtlineare Funktional $F(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$u \longrightarrow F(u) := \frac{1}{2} A[u,u] - \int_G S(u)(x)\, dx \tag{10.7}$$

für alle $u \in H_0^A(G)$. Wir erhalten

Lemma 10.5. *Das Gebiet G sei beschränkt. Es sei $(\gamma,q) \in K(\lambda)$ und $b \in C(\bar{G} \times \mathbb{R})$ erfülle die Bedingung* (E1). *Das Funktional $F(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch* (10.7) *ist stetig Fréchet-differenzierbar auf $H_0^A(G)$.*

Beweis: 1) Der erste Summand in (10.7).

Wegen $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ für alle $\alpha,\beta \in A$ ist $A[\cdot,\cdot]$ symmetrisch. Aufgrund der Bilinearität und der Stetigkeit von $A[\cdot,\cdot]$ (vgl. (7.3)) gilt

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ w \neq 0}} \left| \frac{A[u+w,u+w] - A[u,u] - 2A[u,w]}{\|w\|_A} \right| = \lim_{\substack{w \to 0 \\ w \neq 0}} \frac{|A[w,w]|}{\|w\|_A}$$

$$\leq \lim_{\substack{w \to 0 \\ w \neq 0}} C_2 \|w\|_A = 0$$

für alle $u, w \in H_0^A(G)$, $w \neq 0$. Somit ist die Abbildung $u \longrightarrow A[u,u]$

Fréchet-differenzierbar, und für ihre Fréchet-Ableitung $A'(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L(H_0^A(G), \mathbb{R}) = (H_0^A(G))'$ gilt

$$A'(u) = 2A[u, \cdot].$$

Damit ist die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit des ersten Summanden von (10.7) gezeigt.

2) Der zweite Summand in (10.7).

Zunächst gilt aufgrund der Definition des Operators $\tilde{S}(\cdot)$ (vgl. Lemma 10.3. (c)) und von (10.6)

$$S(u) = \tilde{S} \circ \eta(u) = s(\cdot, \partial^\gamma u)$$

für $u \in H_0^A(G)$. Wir berechnen zuerst die Gâteaux-Ableitung von $S(\cdot)$. Es ist

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{S(u + \varepsilon w) - S(u)}{\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{s(\cdot, \partial^\gamma u + \varepsilon \partial^\gamma w) - s(\cdot, \partial^\gamma u)}{\varepsilon}$$

$$= b(\cdot, \partial^\gamma u)\partial^\gamma w = B(u)\partial^\gamma w$$

für $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $u, w \in H_0^A(G)$.

Die Abbildung

$$B(u)\partial^\gamma: H_0^A(G) \longrightarrow L^1(G), \quad w \longrightarrow B(u)\partial^\gamma w$$

ist linear und stetig auf $H_0^A(G)$, denn mit der Hölderschen Ungleichung und (10.2) folgt

$$\| B(u)\partial^\gamma w \|_{L^1(G)} = \int_G | B(u)\partial^\gamma w | \, dx \leq \| B(u) \|_{q'} \cdot \| \partial^\gamma w \|_q \leq C(\gamma,q) \| B(u) \|_{q'} \cdot \| w \|_A .$$

Da nach Korollar 10.4. $B(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L^{q'}(G)$ beschränkt ist, folgt die Stetigkeit der linearen Abbildung. Somit ist $B(u)\partial^\gamma$ die Gâteaux-Ableitung von $S(\cdot)$, d.h. gemäß Abschnitt 6.2.

$$VS(u) = B(u)\partial^\gamma .$$

Weiter gilt nach Korollar 10.4., daß der Operator $B(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L^{q'}(G)$ stetig ist. Damit ist auch

$$B(\cdot)\partial^\gamma w : H_0^A(G) \longrightarrow L^1(G), \quad u \longrightarrow B(u)\partial^\gamma w$$

stetig. Somit ist $VS(\cdot)$ aufgrund von Satz 6.2. die Fréchet-Ableitung von $S(\cdot)$, d.h.

$$S'(u) = VS(u).$$

Insbesondere existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $u \in H_0^A(G)$ eine Konstante $K = K(u, \varepsilon)$, so daß gilt

$$\left| \frac{S(u+w) - S(u)}{\| w \|_A} \right| \leq K,$$

für alle $w \in H_0^A(G)$ mit $0 < \| w \|_A < \varepsilon$. Nach dem Satz von Lebesgue über das Vertauschen von Grenzübergang und Integration gilt demnach

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ w \neq 0}} \int_G \frac{S(u+w) - S(u)}{\| w \|_A} \, dx = \int_G \lim_{\substack{w \to 0 \\ w \neq 0}} \frac{S(u+w) - S(u)}{\| w \|_A} \, dx$$

$$= \int_G B(u)\partial^\gamma w \, dx \,. \tag{10.8}$$

Damit ist auch der zweite Summand in (10.7) stetig Fréchet-differenzierbar. □

Korollar 10.6. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 10.5 *gilt, daß die Fréchet-Ableitung von* $F(\cdot) : H_0^A(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ *gegeben ist durch*

$$< F'(u), w >_A = A[u, w] - \int_G \tilde{B}(\partial^\gamma u)\partial^\gamma w \, dx \tag{10.9}$$

für alle $u, w \in H_0^A(G)$. □

10.5. Wir führen für $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ die Funktion

$$\rho_p(t) := \begin{cases} e^{p \ln t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -e^{p \ln(-t)} & \text{für } t < 0 \end{cases} \tag{10.10}$$

ein. Die Funktion $\rho_p(\cdot)$ ist ungerade, d.h. es gilt $\rho_p(-t) = -\rho_p(t)$. Aus elementaren Rechnungen ergibt sich für $x, t \in \mathbb{R}$

$$\rho_p(xt) = \rho_p(x)\rho_p(t). \tag{10.11}$$

10.6. Wir wollen jetzt mit Hilfe von Lemma 10.5. die Existenz spezieller Funktionen in $H_0^A(G)$ bzw. $C_0^\infty(G)$ nachweisen, die wir benötigen, wenn wir in den Nichtlinearitäten auch Ableitungen der gesuchten Funktion zulassen wollen (siehe Teil ii) von Bedingung (E4) in Abschnitt 12.3.).

Lemma 10.7. *Es sei* $G \subset \mathbb{R}^N$ *ein beschränktes Gebiet,* A *eine endliche Multiindexmenge und* $\lambda \in \mathbb{N}^N$ *ein Multiindex mit* $(\lambda) \subset \bar{A}$ *(siehe* (10.1) *).*
Existieren $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ *und* $p,q \in \mathbb{R}$ *mit*

i) $(\gamma, q) \in K(\lambda)$ *(definiert gemäß* (4.6) *),*

ii) $1 < p \leq q$,

iii) $\gamma_j \leq p-1$ *für* $j = 1, \ldots, N$,

dann existiert ein $\varphi \in C_0^\infty(G)$, *so daß gilt*

$$\int_G \rho_p(\partial^\gamma \varphi(x))\, dx \neq 0. \tag{10.12}$$

Beweis: 1) Wir betrachten zuerst den eindimesionalen Fall, d.h $N = 1$, $x \in \mathbb{R}$, $G = (a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ist $\gamma = 0$, so gibt es bekanntlich eine nicht negative Funktion in $C_0^\infty(G)$, die nicht überall verschwindet (man vergleiche Adams [2], 2.17).

Daher sei im folgenden $\gamma = n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$(\rho_p)'(t) = \begin{cases} pe^{(p-1)\ln t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ pe^{(p-1)\ln(-t)} & t < 0 \end{cases} \tag{10.13}$$

$$= p\,\rho_{\frac{p-1}{2}}(t^2).$$

Für $b(x,t) = p\,\rho_{\frac{p-1}{2}}(t^2)$ (mit $s(x,t) = \rho_p(t)$) ist die Bedingung (E1) erfüllt und aus Teil 2) des Beweises von Lemma 10.5. folgt, daß das Funktional

$\Psi : H_0^{\lambda}(G) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\Psi(u) = \int_G \rho_p(\partial^n u(x))\, dx, \tag{10.14}$$

$n \in K(\lambda)$, auf $H_0^{\lambda}(G)$ stetig Fréchet-differenzierbar ist. Es folgt, wie im Beweis zu Lemma 10.5. (siehe (10.8)')

$$\Psi'(u)(\psi) = \int_G p\, \rho_{\frac{p-1}{2}}((\partial^n u(x))^2)\, \partial^n \psi(x)\, dx \tag{10.15}$$

für $u \in H_0^{\lambda}(G)$ und alle $\psi \in C_0^{\infty}(G)$.

Nun zeigen wir $\Psi'(u) \neq 0$ für alle $u \in C_0^{\infty}(G)$, $u \neq 0$. Wir nehmen $\Psi'(u) = 0$ an für ein $u \in C_0^{\infty}(G)$, $u \neq 0$, dann folgt

$$0 = \int_G p\, \rho_{\frac{p-1}{2}}((\partial^n u(x))^2)\, \partial^n \psi(x)\, dx$$

$$= (-1)^n\, p \int_G \partial^n (\rho_{\frac{p-1}{2}}((\partial^n u(x))^2))\, \psi(x)\, dx$$

für alle $\psi \in C_0^{\infty}(G)$. (Die Bedingung $n \leq p-1$ stellt sicher, daß der Integrand des letzten Integrals beschränkt ist.) Damit gilt

$$\partial^n (\rho_{\frac{p-1}{2}}((\partial^n u(x))^2)) = 0$$

auf G (die linke Seite der Gleichung ist stetig), woraus folgt

$$\partial^{n-1} (\rho_{\frac{p-1}{2}}((\partial^n u(x))^2)) = \text{const.}.$$

Da u kompakten Träger in $G = (a, b)$ hat, verschwindet die linke Seite auf einem Teilintervall (a, c), $c \in (a, b)$, womit die Konstante gleich Null sein

muß. Wenn wir diesen Schluß $(n-1)$–mal wiederholen, erhalten wir, da $p > 1$ ist,

$$\rho_{\frac{p-1}{2}}\left((\partial^n u(x))^2\right) = 0$$

für alle $x \in (a,b)$. Daraus folgt $(\partial^n u(x))^2 = 0$ und somit $\partial^n u(x) = 0$ auf (a,b). Nun folgt wieder wie oben, da $u \in C_0^\infty(G)$ auf (a,c) verschwindet, daß $u(x) = 0$ gilt für alle $x \in (a,b)$, ein Widerspruch zu unserer Annahme.

Somit ist für $u \in C_0^\infty(G)$, $u \neq 0$ das Funktional $\Psi'(u)$ verschieden vom Nullfunktional. Da $C_0^\infty(G)$ in $H_0^A(G)$ dicht liegt, existiert außerdem ein $\eta \in C_0^\infty(G)$ mit

$$\Psi'(u)(\eta) \neq 0.$$

Nun gilt für $\varepsilon > 0$ (gemäß (6.1))

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{\Psi(u+\varepsilon\eta) - \Psi(u)}{\varepsilon \|\eta\|_A} = \frac{\Psi'(u)(\eta)}{\|\eta\|_A} \neq 0. \tag{10.16}$$

Wäre nun $\Psi(u+\varepsilon\eta) = 0$ für alle $\varepsilon \in [0,1]$, so würde die linke Seite von (10.16) verschwinden. Da dies nicht der Fall sein kann, gibt es ein $\varepsilon_0 \in [0,1]$ mit $\Psi(u+\varepsilon_0\eta) \neq 0$. Wählen wir $\varphi = u + \varepsilon_0\eta \in C_0^\infty(G)$, so ist wegen (10.14) das Lemma für den Fall $N = 1$ bewiesen.

2) Nun sei $N > 1$. In G gibt es einen offenen Quader

$$Q(a,b) := \{ x \in \mathbb{R}^N \mid a_j < x_j < b_j \text{ für } j = 1,\dots,N \} \qquad (10.17)$$

für $a,b \in \mathbb{R}^N$, $a < b$, mit $\overline{Q(a,b)} \subset G$. Zu jedem $j = 1,\dots,N$ finden wir gemäß dem ersten Teil des Beweises ein $\varphi_{\gamma_j} \in C_0^\infty((a_j,b_j))$ mit

$$\int_{a_j}^{b_j} \rho_p(\partial_j^{\gamma_j} \varphi_{\gamma_j}(x_j))\, dx_j \neq 0.$$

Wir definieren

$$\varphi(x) := \prod_{j=1}^{N} \varphi_{\gamma_j}(x_j), \qquad (10.18)$$

und setzen die Funktion φ auf $G - Q(a,b)$ zu Null fort. Es gilt

$$\partial^\gamma \varphi(x) = \prod_{j=1}^{N} \partial_j^{\gamma_j} \varphi_{\gamma_j}(x_j).$$

Wegen $\rho_p(xt) = \rho_p(x)\rho_p(t)$ für alle $x,t \in \mathbb{R}$ folgt

$$\int_G \rho_p(\partial^\gamma \varphi(x))\, dx = \int_G \rho_p(\prod_{j=1}^{N} \partial_j^{\gamma_j} \varphi_{\gamma_j}(x_j))\, dx$$

$$= \int_G \prod_{j=1}^{N} \rho_p(\partial_j^{\gamma_j} \varphi_{\gamma_j}(x_j))\, dx = \int_{Q(a,b)} \prod_{j=1}^{N} \rho_p(\partial_j^{\gamma_j} \varphi_{\gamma_j}(x_j))\, dx$$

$$= \prod_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} \rho_p(\partial_j^{\gamma_j} \varphi_{\gamma_j}(x_j))\, dx_j \neq 0.$$

□

Bemerkung 10.8. Man sieht am Beweis des Lemma, daß im Falle $p \in \mathbb{N}$ die Bedingung iii), d.h. $\gamma_j \leq p-1$, nicht notwendig ist. □

11. Funktionale, die einer Palais-Smale-Bedingung genügen

11.1. In diesem Kapitel wird die Bedingung (E2) eingeführt und gezeigt, daß sie hinreichend für die Gültigkeit der (PS)–Bedingung (siehe Abschnitt 6.3.) ist. Sei eine Funktion $b \in C(\overline{G} \times \mathbb{R})$ gegeben und sei $s(x,t) = \int_0^t b(x,s)\, ds$, $x \in \overline{G}$, $t \in \mathbb{R}$, die zugehörige Stammfunktion bezüglich t, dann formulieren wir die:

Bedingung (E2) *Es gebe ein* $\vartheta \in [0, \frac{1}{2})$ *und ein* $r > 0$, *so daß*

$$s(x,t) \leq \vartheta\, b(x,t)\, t \tag{11.1}$$

für alle $x \in \overline{G}$ *und alle* $t \in \mathbb{R}$ *mit* $|t| \geq r$ *gilt.* □

11.2. Wir zeigen nun:

Satz 11.1. *Sei* G *ein beschränktes Gebiet und es gelten die in Abschnitt 7.1. gemachten Voraussetzungen an den Operator* $A(\,,D)$. *Weiter genüge die Bilinearform* $A[\cdot,\cdot]$ *auf* $H_0^A(G)$ *der Ungleichung* (7.4), *d.h.* $A(\cdot,D)$ *ist* $H_0^A(G)$*–elliptisch. Außerdem erfülle die Funktion* $b \in C(\overline{G} \times \mathbb{R})$ *die Bedingungen* (E1) *und* (E2), *dann genügt das Funktional* $F(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(u) = \frac{1}{2} A[u,u] - \int_G S(u)(x)\, dx,$$

für alle $u \in H_0^A(G)$, *der* (PS)*– Bedingung.*

Beweis: Aufgrund von Lemma 10.5. ist das Funktional $F(\cdot)$ stetig Fréchet-differenzierbar. Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $H_0^A(G)$, für die gelte

$$|F(u_k)| \leq M \tag{11.2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und ein passendes $M > 0$, sowie

$$\lim_{k\to\infty} F'(u_k) \longrightarrow 0 \quad \text{in} \quad H_0^A(G).$$

(Als Hilbertraum ist $H_0^A(G)$ isomorph zu seinem Dualraum $(H_0^A(G))'$.) Für die Folge $(F'(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gilt somit, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, daß gilt

$$\left| < F'(u_k), \frac{v}{\|v\|_A} >_A \right| \leq \varepsilon$$

für alle $k \geq k_0$ und alle $v \in H_0^A(G)$, $v \neq 0$. Hieraus folgt wegen (10.9)

$$\left| A[u_k, v] - \int_G B(u_k)\, \partial^\gamma v \; dx \right| \leq \varepsilon \|v\|_A \tag{11.3}$$

für alle $k \geq k_0$ und alle $v \in H_0^A(G)$. Wir setzen $v = u_k$, $\varepsilon = 1$ und erhalten

$$-A[u_k, u_k] + \int_G B(u_k)\, \partial^\gamma u_k \; dx \leq \|u_k\|_A \tag{11.4}$$

für $k \geq k_0$.

Aufgrund von (10.2) ist $\partial^\gamma u \in L^q(G)$ für alle $u \in H_0^A(G)$ und somit meßbar. Damit folgt, daß für $r \geq 0$

$$I_r(u) = \{ x \in \bar{G} \mid |\partial^\gamma u(x)| \le r \} = \bar{G} \cap (\partial^\gamma u)^{-1}([-r,r]) \quad (11.5)$$

meßbar ist, da das Urbild einer meßbaren Menge unter einer meßbaren Abbildung selbst meßbar ist. Wegen der Definition von $S(\cdot)$ (vgl. Korollar 10.4.) gilt

$$\int_G S(u)\,dx = \int_G s(x,\partial^\gamma u(x))\,dx = \left[\int_{I_r(u)} + \int_{G-I_r(u)} \right] s(x,\partial^\gamma u(x))\,dx$$

$$=: I_1 + I_2 .$$

Für I_1 folgt aus (11.4)

$$I_1 = \int_{I_r(u)} s(x,\partial^\gamma u(x))\,dx \le a' \int_{I_r(u)} dx + d' \int_{I_r(u)} |\partial^\gamma u(x)|^q\,dx$$

$$= (a' + d' r^q) \int_G dx =: C(r)$$

für eine geeignete Konstante $C(r)$. Um I_2 abzuschätzen wählen wir $r > 0$ fest, gemäß Bedingung (E2), und erhalten

$$I_2 = \int_{G-I_r(u)} s(x,\partial^\gamma u(x))\,dx \le \vartheta \int_{G-I_r(u)} b(x,\partial^\gamma u(x))\,\partial^\gamma u(x)\,dx .$$

Somit folgt

$$\int_G S(u)\,dx = I_1 + I_2 \le C(r) + \vartheta \int_{G-I_r(u)} b(x,\partial^\gamma u(x))\,\partial^\gamma u(x)\,dx$$

$$= C(r) + \vartheta \int_G b(x,\partial^\gamma u(x))\,\partial^\gamma u(x)\,dx$$

$$- \vartheta \int_{I_r(u)} b(x, \partial^\gamma u(x)) \partial^\gamma u(x)\, dx .$$

Wegen (10.3) gilt

$$\left| \int_{I_r(u)} b(x, \partial^\gamma u(x))\, \partial^\gamma u(x)\, dx \right| \le a \int_{I_r(u)} dx + d \int_{I_r(u)} |\partial^\gamma u(x)|^{q-1}\, dx$$

$$\le (a + d\, r^{q-1}) \int_{I_r(u)} dx$$

$$=: C'(r).$$

Hiermit erhalten wir

$$\int_G S(u)\, dx \le C(r) + \vartheta C'(r) + \vartheta \int_G b(x, \partial^\gamma u(x)) \partial^\gamma u(x)\, dx .$$

Für eine passend gewählte Konstante C folgt damit

$$\int_G S(u)\, dx \le C + \vartheta \int_G b(x, \partial^\gamma u(x)) \partial^\gamma u(x)\, dx . \tag{11.6}$$

Aus (11.2), (10.7) und (11.6) folgt nun für alle $k \in \mathbb{N}$

$$M \ge F(u_k) = \frac{1}{2} A[u_k, u_k] - \int_G S(u_k)\, dx$$

$$\ge \frac{1}{2} A[u_k, u_k] - C - \vartheta \int_G B(u_k) \partial^\gamma u_k(x)\, dx .$$

Hierzu addieren wir (11.4), multipliziert mit ϑ, und erhalten für $k \ge k_0$

$$M \ge \left(\frac{1}{2} - \vartheta \right) A[u_k, u_k] - C - \vartheta \|u_k\|_A .$$

Da nach Vorraussetzung $A[\cdot,\cdot]$ positiv ist, d.h. der Ungleichung (7.4)

genügt, folgt

$$M \geq \left(\frac{1}{2} - \vartheta\right) C_0 \|u_k\|_A^2 - \vartheta \|u_k\|_A - C$$

für $k \geq k_0$. Da $\left(\frac{1}{2} - \vartheta\right) > 0$ ist, muß $\|u_k\|_A$ beschränkt sein, d.h. es existiert eine Konstante $M' > 0$ mit

$$M' \geq \|u_k\|_A \tag{11.7}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.6. gibt es eine Teilfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß $(\partial^\gamma u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^q(G)$ gegen ein Element $w (\in L^q(G))$ und daß $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(G)$ gegen ein $u (\in L^2(G))$ konvergiert. Aufgrund der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung in $L^1_{loc}(G)$ (siehe Adams [2], 1.57) gilt daher $\partial^\gamma u_n \to \partial^\gamma u$ für $n \to \infty$ in $L^q(G)$, insbesondere ist $\partial^\gamma u \in L^q(G)$.

Aus (11.3) folgt für $\varepsilon > 0$ und $n, m \geq N(\varepsilon)$, $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ genügend groß,

$$A[u_n - u_m, u_n - u_m] \leq |A[u_n, u_n - u_m]| + |A[u_m, u_n - u_m]|$$

$$\leq 2\varepsilon \|u_n - u_m\|_A + \left|\int_G B(u_n)\, \partial^\gamma (u_n - u_m)\, dx\right| + \left|\int_G B(u_m)\, \partial^\gamma (u_n - u_m)\, dx\right|.$$

Aufgrund von Korollar 10.4. und (10.2) können wir auf die beiden Integrale die Höldersche Ungleichung für $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ anwenden und erhalten

$$A[u_n - u_m, u_n - u_m] \leq 2\varepsilon(\|u_n\|_A + \|u_m\|_A)$$

$$+ (\|B(u_n)\|_{q'} + \|B(u_m)\|_{q'}) \|\partial^\gamma(u_n - u_m)\|_q.$$

Da die Folge beschränkt ist und $B(\cdot)$ nach Korollar 10.4. beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet, gibt es eine Konstante $\tilde{C} > 0$, unabhängig von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, derart, daß

$$A[u_n - u_m, u_n - u_m] \leq 4\varepsilon M' + \tilde{C} \|\partial^\gamma(u_n - u_m)\|_q$$

ist. Da andererseits $A[\cdot,\cdot]$ der Ungleichung (7.4) genügt, folgt

$$C_0 \|u_n - u_m\|_A^2 \leq 2\varepsilon M' + \tilde{C} \|\partial^\gamma(u_n - u_m)\|_q.$$

Da die Folge $(\partial^\gamma u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben bemerkt in $L^q(G)$ eine Cauchy-Folge ist und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist, ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H_0^A(G)$ eine Cauchy-Folge. Aufgrund der Eindeutigkeit des Limes in $L^2(G)$ folgt $u_n \longrightarrow u$ in $H_0^A(G)$. □

12. Ein Existenzsatz

Wir wollen für das durch (10.7) definierte nichtlineare Funktional $F(\cdot)$ die Existenz eines nichttrivialen kritischen Punktes nachweisen (vgl. Abschnitt 6.4.).

12.1. Dazu erinnern wir, daß $G \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet sei. Die endliche Multiindexmenge $A \subset \mathbb{N}_0^N$ habe die Eigenschaft, daß gilt $e_j \in \bar{A}$ für $j = 1, \ldots, N$. Wir betrachten den gemäß Abschnitt 7.1. definierten linearen Differentialoperator

$$A(\cdot, D) = \sum_{\alpha,\beta \in A} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha a_{\alpha\beta}(\cdot) \partial^\beta$$

mit der Ordnung $2|A|$. Dem Operator $A(\cdot,D)$ ordnen wir den Hilbertraum $H_0^A(G)$, mit der gemäß (3.2) definierten Norm $\| \cdot \|_A$, und die stetige Bilinearform

$$A[u,v] := \sum_{\alpha,\beta \in A} \int_G a_{\alpha\beta}(x) \partial^\beta u \, \partial^\alpha v \, dx$$

für $u, v \in H_0^A(G)$ zu (vgl. die Abschnitte 7.1., 7.2.).

12.2. Sei $\lambda \in \mathbb{N}^N$ ein Multiindex mit $(\lambda) \subset \bar{A}$ (vgl. Abschnitt 10.1.). Weiterhin seien $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ und $q \in (2,\infty)$ mit $(\gamma,q) \in K(\lambda)$ (vgl. (4.6)). Außerdem sei eine Funktion $b \in C(\bar{G} \times \mathbb{R})$ gegeben und sei $s(x,t) = \int_0^t b(x,s)\, ds$, $x \in \bar{G}$, $t \in \mathbb{R}$, die zugehörige Stammfunktion bezüglich t. Genügt die Funktion b der Bedingung (E1) (siehe Abschnitt

10.2.), dann sind gemäß Korollar 10.4. die Nemytskiĭ–Operatoren $B(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L^{q'}(G)$ bzw. $S(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L^1(G)$ (siehe (10.5) bzw. (10.6)) vollstetig und beschränkt ($q' = \frac{q}{q-1}$, $(\gamma,q) \in K(\lambda)$). Außerdem ist aufgrund von Lemma 10.5. das nichtlineare Funktional $F(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longrightarrow F(u) := \frac{1}{2} A[u,u] - \int_G S(u)(x)\, dx \tag{12.1}$$

für alle $u \in H_0^A(G)$, stetig Fréchet–differenzierbar. Nimmt man noch die Bedingung (E2) (siehe Abschnitt 11.1.) hinzu, so erfüllt gemäß Satz 11.1. das Funktional $F(\cdot)$ die (PS)–Bedingung (zur Definition vergleiche Abschnitt 6.3.).

12.3. Um für das nichtlineare Funktional $F(\cdot)$, gegeben durch (12.1), die Existenz eines nichttrivialen kritischen Punktes nachzuweisen, werden wir noch weitere Bedingungen an $s(x,t) = \int_0^t b(x,s)\, ds$ stellen müssen:

Bedingung (E3) *Es gebe zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *derart, daß*

$$|s(x,t)| \leq \varepsilon |t|^2 \tag{12.2}$$

gilt, für alle $|t| \leq \delta$ *und alle* $x \in \bar{G}$. □

Bedingung (E4) *Es seien* $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ *und* $q \in (2,\infty)$ *mit* $(\gamma,q) \in K(\lambda)$.

i) *Ist* $\gamma = 0$, *so gebe es zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *eine Konstante* $C(n) > 0$ *derart, daß für ein* $C_3 \in \mathbb{R}$

$$s(x,t) \geq n t^2 - C_3 \tag{12.3}$$

gilt, für alle $t > C(n)$ *oder für alle* $t < -C(n)$ *und alle* $x \in \overline{G}$.

ii) *Ist* $\gamma \neq 0$, *so gebe es zu* γ *und* q *ein* $p \in \mathbb{R}$, *mit* $p \in (2,q]$, *das der Bedingung* $\gamma_j \leq p-1$ *für* $j = 1, \ldots, N$, *genügt. Weiterhin gebe es Konstanten* $\tilde{a}, \tilde{d} \in \mathbb{R}$, $\tilde{d} \neq 0$, *so daß mit*

$$\rho_p(t) := \begin{cases} e^{p \ln t} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t = 0 \\ -e^{p \ln(-t)} & \text{für} \quad t < 0 \end{cases} \tag{12.4}$$

gilt

$$s(x,t) \geq \tilde{a} + \tilde{d}\,\rho_p(t) \tag{12.5}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in \overline{G}$. □

12.4. Nun erhalten wir das Hauptresultat dieser Arbeit

Satz 12.1. (Existenzsatz.) *Das Funktional* $F(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(u) = \frac{1}{2} A[u,u] - \int_G S(u)(x)\, dx$$

für alle $u \in H_0^A(G)$, *sei gemäß den Abschnitten* 12.1., 12.2. *definiert. Ist die Bilinearform* $A[\cdot,\cdot]$ *auf* $H_0^A(G)$ *positiv, d.h. genügt der Ungleichung* (7.4) *und erfüllt die den Nemytskiĭ-Operator* $S(\cdot)$ *erzeugende Funktion* s *die Bedingungen* (E3), (E4), *so hat das Funktional* $F(\cdot)$ *in* $H_0^A(G)$ *einen*

nichttrivialen kritischen Punkt.

Beweis: Das Funktional $F(\cdot)$ ist nach Lemma 10.5. stetig Fréchet-differenzierbar und genügt nach Satz 11.1. der (PS)–Bedingung. Zunächst gilt $F(0) = 0$. Wir zeigen die Existenz einer reellen Zahl $R' > 0$, so daß gilt $F(u) \geq c_0 > 0$ für alle $u \in H_0^A(G)$ mit $\|u\|_A = R'$.

Es seinen $\varepsilon, \delta > 0$ entsprechend der Bedingung (E3) gegeben. Aus (10.4) folgt, es existiert eine Konstante $C(\delta) > 0$ mit

$$|s(x,t)| \leq C(\delta)\,|t|^q \tag{12.6}$$

für alle $x \in \overline{G}$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| > \delta$.

Für jedes beliebige, aber feste $u \in H_0^A(G)$ gilt für die meßbare Menge $I_\delta(u) := \{ x \in G \mid |\partial^\gamma u(x)| \leq \delta \}$ (man vergleiche (11.5))

$$\int_G s(x,\partial^\gamma u(x))\,dx = \int_{I_\delta(u)} s(x,\partial^\gamma u(x))\,dx + \int_{G-I_\delta(u)} s(x,\partial^\gamma u(x))\,dx .$$

Die beiden Integrale auf der rechten Seite der Ungleichung schätzen wir gemäß (12.2) bzw. (12.6) ab und erhalten

$$\int_G s(x,\partial^\gamma u(x))\,dx \leq \varepsilon \int_{I_\delta(u)} |\partial^\gamma u(x)|^2\,dx + C(\delta) \int_{G-I_\delta(u)} |\partial^\gamma u(x)|^q\,dx$$

$$\leq \varepsilon \|\partial^\gamma u\|_{0,G}^2 + C(\delta)\,\|\partial^\gamma u\|_{q,G}^q . \tag{12.7}$$

Da nach Vorraussetzung $(\gamma,q) \in K(\lambda) \subset B(\lambda)$ ist, gibt es nach (10.2) eine Konstante $C_4 = C_4(\gamma,q) > 0$, so daß gilt

$$\| \partial^\gamma u \|_{q,G}^q \leq C_4 \| u \|_A^q . \tag{12.8}$$

Da G beschränkt ist, folgt mit der Hölderschen Ungleichung und (10.2) für passende Konstante $C_5 = C_5(\gamma,q,G) > 0$, $C_6 = C_6(\gamma,q,G) > 0$

$$\| \partial^\gamma u \|_{0,G}^2 \leq C_5 \| \partial^\gamma u \|_{q,G}^2 \leq C_6 \| u \|_A^2 . \tag{12.9}$$

Wir erhalten aus (12.7), (12.8) und (12.9)

$$\int_G S(u)(x)\, dx = \int_G s(x, \partial^\gamma u(x))\, dx \leq \varepsilon C_6 \| u \|_A^2 + C_7 \| u \|_A^q .$$

mit $C_7 = C(\delta) C_4$. Somit folgt für das Funktional $F(\cdot)$ zusammen mit der Ungleichung (7.4)

$$F(u) = \frac{1}{2} A[u,u] - \int_G S(u)(x)\, dx$$

$$\geq \frac{C_0}{2} \| u \|_A^2 - \varepsilon C_6 \| u \|_A^2 - C_7 \| u \|_A^q .$$

Mit $\varepsilon < \frac{C_0}{2C_6}$ ist $\frac{C_0}{2} - \varepsilon C_6 > 0$, und wir betrachten für $R > 0$ das Polynom

$$P(R) = \left(\frac{C_0}{2} - \varepsilon C_6 \right) R^2 - C_7 R^q .$$

Da nach Vorraussetzung $q > 2$ ist, gilt für $R' > 0$ hinreichend klein $P(R') \geq c_0 > 0$ und folglich

$$F(u) \geq c_0 > 0$$

für alle $u \in H_0^A(G)$ mit $\| u \|_A = R'$.

Wir können das "Mountain Pass"-Lemma, Satz 6.3., anwenden, falls wir die Existenz wenigstens eines $u \in H_0^A(G)$ mit $\|u\|_A > R'$ und $F(u) \leq 0$ zeigen können.

1) Falls $\gamma = 0$ ist, sei $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in G$ und $\|\varphi\|_A = 1$. Wir definieren für $r \in \mathbb{R}$

$$J_r(\varphi) := \{ x \in G \mid \varphi(x) \leq r \}. \tag{12.10}$$

Weiter wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 2\frac{C_2}{C_8}$, wobei sich die Konstante C_2 gemäß (7.3) aus der Beschränktheit der Bilinearform ergibt und $C_8 := \int_G (\varphi(x))^2 \, dx > 0$ ist. Wir nehmen zunächst an, daß gemäß Teil i) von Bedingung (E4) zu diesem n_0 ein $C(n_0) > 0$ existiert, so daß gilt

$$s(x,t) \geq n_0 t^2 - C_3 \tag{12.11}$$

für alle $t > C(n_0) > 0$ und alle $x \in \bar{G}$. In (12.10) wähle man

$$r = \frac{C(n_0)}{\mu}, \tag{12.12}$$

mit einem noch näher zu bestimmenden $\mu > 0$. Damit erhalten wir für unsere gewählte Funktion $\varphi (\in C_0^\infty(G))$ gemäß (12.11)

$$\int_{G - J_r(\varphi)} s(x, \mu\varphi(x)) \, dx \geq n_0 \mu^2 \int_{G - J_r(\varphi)} (\varphi(x))^2 \, dx - C_9 \tag{12.13}$$

mit $C_9 = C_3 \int_G dx$ Es existiert ein r_0, so daß gilt

$$\int_{G-J_r(\varphi)} (\varphi(x))^2\,dx \;\geq\; \frac{C_8}{2} \;=\; \frac{1}{2}\int_G (\varphi(x))^2\,dx$$

für $r \leq r_0$. Mit $\mu_0 = \dfrac{C(n_0)}{r_0}$ erhalten wir für $\mu \geq \mu_0$

$$\int_{G-J_r(\varphi)} s(x,\mu\varphi(x))\,dx \;\geq\; n_0\mu^2\frac{C_8}{2} - C_9. \tag{12.14}$$

Weiterhin folgt aus (10.4) wegen $\varphi(x) \geq 0$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} -\int_{J_r(\varphi)} s(x,\mu\varphi(x))\,dx \;&\leq\; (a' + d'|\mu|^q|r|^q)\int_{J_r(\varphi)} dx \\ &=\; (a' + d'(C(n_0))^q)\int_G dx \;=:\; C_{10}. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Aus (7.3), (12.14) und (12.15) erhalten wir somit $\left(-C_2 \geq \dfrac{-n_0 C_8}{2}\right)$

$$F(\mu\varphi) \;=\; \frac{1}{2}A[\mu\varphi,\mu\varphi] \;-\; \int_G S(\mu\varphi)(x)\,dx$$

$$\;=\; \frac{1}{2}A[\mu\varphi,\mu\varphi] - \int_{G-J_r(\varphi)} s(x,\mu\varphi(x))\,dx - \int_{J_r(\varphi)} s(x,\mu\varphi(x))\,dx$$

$$\;\leq\; \frac{C_2}{2}\|\mu\varphi\|_A^2 - \frac{n_0 C_8}{2}\mu^2 + C_9 - C_{10}$$

$$\;\leq\; \frac{C_2}{2}\mu^2 - C_2\mu^2 + C_9 - C_{10}$$

$$\;=\; -\frac{C_2}{2}\mu^2 + C_9 - C_{10}.$$

Damit folgt für $\mu = \|\mu\varphi\|_A \geq \max\{\mu_0, R'\}$ hinreichend groß (R' wie oben)

$$F(\mu\varphi) \leq 0.$$

Gilt nun andernfalls in Teil i) von Bedingung (E4), daß zu n_0 ein $C(n_0)$ existiert, so daß gilt

$$s(x,t) \geq n_0 t^2 - C_3$$

für alle $t < -C(n_0)$ und alle $x \in \overline{G}$, so nehmen wir statt (12.12)

$$r = \frac{-C(n_0)}{\mu}$$

und $\mu < -R' < 0$. Mit $\mu_0 = \frac{-C(n_0)}{r_0}$ erhalten wir für $\mu \leq \mu_0$ die Abschätzung (12.14). (12.15) gilt für alle $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. Daher folgt für $\mu \longrightarrow -\infty$

$$F(\mu\varphi) \leq 0.$$

2) Nun sei $\gamma \neq 0$. Wir nehmen zuerst in (12.5) $\tilde{a} > 0$. Gemäß Lemma 10.7. gibt es zu $p \in (2,q]$ aus Teil ii) von Bedingung (E4) ein $\varphi \in C_0^\infty(G)$ mit $\int_G \rho_p(\partial^\gamma \varphi(x))\, dx \neq 0$ (ohne Einschränkung $= M > 0$). Dann folgt mit $\mu > 0$ und den Eigenschaften von $\rho_p(\cdot)$ (siehe Abschnitt 10.5.)

$$\begin{aligned} \int_G s(x, \mu\partial^\gamma\varphi(x))\, dx &\geq \tilde{a} \int_G dx + \tilde{d}\,\mu^p \int_G \rho_p(\partial^\gamma\varphi(x))\, dx \\ &> C_{11} + \tilde{d}\, M\, \mu^p. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Es folgt für $F(\cdot)$ aus (7.3) und (12.16)

$$F(\mu\varphi) = \frac{1}{2}A[\mu\varphi,\mu\varphi] - \int_G S(\mu\varphi)(x)\,dx$$

$$\leq \frac{C_2}{2}\|\varphi\|_A^2\mu^2 - C_{11} - \tilde{d}\,M\,\mu^p.$$

Wegen $p > 2$ ist

$$F(\mu\varphi) < 0$$

für μ genügend groß, da $\tilde{d}, M, \mu > 0$ gilt. Ist $\tilde{d} < 0$, so nehmen wir die Funktion $-\varphi$ und erhalten das gewünschte Resultat analog.

Die Aussage des Satzes folgt nun aus Satz 6.3. und Korollar 6.4.. □

12.5. Die Existenz einer nichttrivialen Lösung des verallgemeinerten Dirichlet–Problems (Problem D, siehe Kapitel 9.) folgt nun unmittelbar aus Korollar 10.6.

Satz 12.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 12.1. existiert ein* $v \in H_0^A(G)$, $v \neq 0$, *so daß gilt*

$$\langle F'(v),\varphi\rangle = A[v,\varphi] - \int_G \tilde{B}(\partial^\gamma v)\,\partial^\gamma\varphi\,dx = 0 \qquad (12.17)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$, *d.h. die Funktion* v *ist eine Lösung von Problem D.* □

13. Beispiele

Wir wenden nun Satz 12.1. auf die in der Einleitung angegebenen Gleichungen an. Für den Fall $N = 2$ führen wir die Notation

$$x_1 = x, \qquad x_2 = t.$$

ein.

13.1. Die Zabusky–Gleichung

Wir betrachten das Problem, alle hinreichend oft differenzierbaren Funktionen $u = u(x,t)$ zu finden, für die die Zabusky–Gleichung gilt

$$-u_{tt} + a\,u_{xx} + c\,u_{xxxx} + 2d\,u_x u_{xx} = 0, \quad a,c,d \in \mathbb{R},\ c > 0,\ d \neq 0, \tag{13.1}$$

auf einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$.

i) Der lineare Teil

Es ist

$$A(x,D)u = -u_{tt} + a\,u_{xx} + c\,u_{xxxx} \tag{13.2}$$

ein semielliptischer Differentialoperator (vgl. Hörmander [14], Abschnitt 4 1.). Damit ist die zugehörige Multiindexmenge

$$A = \{ (1,0), (2,0), (0,1) \}, \tag{13.3}$$

womit wir die Norm erhalten

$$\|w\|_A = \int_G (w_t^2 + w_x^2 + w_{xx}^2 + w^2)\, dx\, dt \tag{13.4}$$

und die Bilinearform

$$A[v,w] = \int_G (v_t w_t - a v_x w_x + c v_{xx} w_{xx}) \, dx \, dt \qquad (13.5)$$

für $v,w \in H_0^A(G)$.

Wir wollen sehen, unter welchen Bedingungen an den Koeffizienten a die Bilinearform $A[\cdot,\cdot]$ auf $H_0^A(G)$ positiv ist, d.h. der Ungleichung (7.4) genügt. Sei $w \in H_0^A(G)$, dann folgt aus der Poincaré–Ungleichung (4.2)

$$\| w \|_0^2 \le C' \| w_{xx} \|_0^2 , \qquad \| w_x \|_0^2 \le C'' \| w_{xx} \|_0^2 \qquad (13.6)$$

mit geeigneten Konstanten C', C''. Falls $a < \frac{c}{C''}$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < \frac{n-1}{n} \frac{c}{C''}$, dann gilt mit $C_0 := \min\{ 1, \frac{(n-1)c}{n C''} - a, \frac{c}{2n}, \frac{c}{2n C'} \}$

$$A[w,w] = \int_G (w_t^2 - a w_x^2 + c w_{xx}^2) \, dx \, dt$$

$$= \int_G (w_t^2 - a w_x^2 + \frac{c}{2n} w_{xx}^2 + \frac{n-1}{n} c w_{xx}^2 + \frac{c}{2n} w_{xx}^2) \, dx \, dt$$

$$\ge \int_G (w_t^2 - a w_x^2 + \frac{c}{2n} w_{xx}^2 + \frac{(n-1)c}{n C''} w_x^2 + \frac{c}{2n C'} w^2) \, dx \, dt \qquad (13.7)$$

$$\ge C_0 \| w \|_A^2 .$$

ii) Der nichtlineare Teil

Wir betrachten nun $K(\lambda)$ für $\lambda = (2,1)$ und wollen zeigen $(\gamma, q) = ((1,0),3) \in K(\lambda)$. Es gilt

$$\left| (1,0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} , \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot (2,1) \right| = \left| \left(\frac{7}{6} , \frac{1}{6} \right) \quad (2,1) \right|$$

$$= \frac{7}{12} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} < 1$$

womit $(\gamma, q) \in K(\lambda)$ ist. Es hat weiterhin die den Nemytskiĭ–Operator $\tilde{B}(\cdot)$ erzeugende Funktion $b \in C(\bar{G} \times \mathbb{R})$ die Gestalt

$$b(x,t) = b(t) = d\,t^2, \tag{13.8}$$

d.h. es gilt für die Nichtlinearität von (13.1)

$$d\,(u_x^2)_x = \partial^7 \tilde{B}(\partial^7 u).$$

Weiter ist

$$s(x,t) = s(t) = \frac{d}{3}t^3. \tag{13.9}$$

Daß die Bedingung (E1) (siehe Abschnitt 10.2.) mit $\gamma = (1,0)$ und $q = 3$ erfüllt ist, ist offensichtlich. Damit ist gemäß Korollar 10.4. der Nemytskiĭ–Operator $S(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L^1(G)$, $S(u) = \frac{d}{3}u_x^3$ für $u \in H_0^A(G)$, stetig und beschränkt. Die Gleichung (13.1) ist Euler–Gleichung des Funktionals

$$F(u) = \int_G \left[\frac{1}{2}(u_t^2 - a\,u_x^2 + c\,u_{xx}^2) - \frac{d}{3}u_x^3 \right] dx\,dt, \tag{13.10}$$

d.h. (13.1) erhält man für hinreichend glatte Funktionen, wenn die Fréchet–Ableitung von (13.10) gleich Null ist (man vergleiche Korollar 10.6.). Mit $\vartheta = \frac{1}{3}$ ist auch Bedingung (E2) (siehe Abschnitt 11.1.) für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit genügt $F(\cdot)$ gemäß Satz 11.1. der (PS)–Bedingung Weiterhin erfüllt die Funktion $s = s(t)$ auch die Bedingung (E3) und Teil ii) von

Bedingung (E4) mit $p = q = 3$ (beide in Abschnitt 12.3.).

Der Existenzsatz, Satz 12.1., und Satz 12.2. liefern somit

Satz 13.1. *Die Gleichung* (13.1) *hat für jedes beschränkte Gebiet* G *eine verallgemeinerte Lösung* $u \in H_0^A(G)$, $u \neq 0$, *falls* $a < \frac{c}{C''}$ *ist,* C'' *gemäß* (13.6), *d.h. die Funktion* u *erfüllt die Funktionalgleichung*

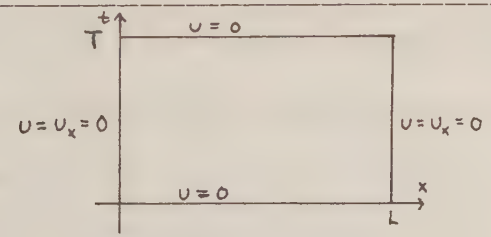
$$\int_G \left(u_t \varphi_t - a u_x \varphi_x + c u_{xx} \varphi_{xx} - d u_x^2 \varphi_x \right) dx\, dt = 0 \qquad (13.11)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. □

Sei speziell G der Quader $(0,L)\times(0,T)$. Analog zu der Poincaré–Ungleichung (4.2) gilt in diesem Fall

$$\| u_x \|_0^2 \leq 4L^2 \| u_{xx} \|_0^2 . \qquad (13.12)$$

Wir erhalten, falls $a < \frac{c}{4L^2}$ ist, eine nichttriviale Lösung von Problem D für



Randwerte am Quader

jedes $T > 0$. Satz 5.4. liefert als natürliche Randbedingungen für den Quader:

$u, u_x = 0$ fast überall auf $\{0\}\times[0,T]$ und $\{L\}\times[0,T]$, sowie

$u = 0$ fast überall auf $[0,L]\times\{0\}$ und $[0,L]\times\{T\}$.

Wir wollen noch weitere Nichtlinearitäten bestimmen und fragen, welche Potenzen $q \in \mathbb{N}$ in den Gleichungen

$$-u_{tt} + a\,u_{xx} + c\,u_{zzzz} + q\,d\,u^{q-1} = 0, \quad a,c,d \in \mathbb{R},\ c > 0,\ d \neq 0, \tag{13.13}$$

$$-u_{tt} + a\,u_{xx} + c\,u_{zzzz} + q\,d\,(u_x)_x^{q-1} = 0, \quad a,c,d \in \mathbb{R},\ c > 0,\ d \neq 0, \tag{13.14}$$

auch die Bedingungen (E1), (E2), (E3) und (E4) erfüllen. Gemäß der Definition von $K(\lambda)$, (siehe (4.6)) muß gelten

$$\left| (0,0) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q}, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q}\right) : (2,1) \right| = \frac{q-2}{4q} + \frac{q-2}{2q} = \frac{3q-6}{4q} < 1, \tag{13.15}$$

bzw. im zweiten Fall

$$\left| (1,0) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q}, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q}\right) : (2,1) \right| = \frac{3q-2}{4q} + \frac{q-2}{2q} = \frac{5q-6}{4q} < 1. \tag{13.16}$$

Daraus ergibt sich für (13.13) $q \in (2,\infty)$ und für (13.14) $q \in (2,6)$. Die den Nemytskiĭ $\tilde{B}(\cdot)$ erzeugende Funktion $b(t) = q\,d\,\rho_{\frac{q-1}{2}}(t^2)$ erfüllt die Bedingung (E1). Ihre Stammfunktion $s(t) = d\,\rho_q(t^2)$ (siehe (10.13)) erfüllt die Bedingung (E2) mit $\vartheta = \frac{1}{q}$; wegen $q > 2$ erfüllt sie auch die Bedingung (E3) und mit $p = q$ auch Teil i) bzw. Teil ii) von Bedingung (E4). Damit sind wieder alle Voraussetzungen von Satz 12.1 und Satz 12.2. erfüllt.

13.2. Die 'quadrierte Wellengleichung'

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Wir wollen zu dem nicht hypoelliptischen Operator

$$A(x,D)u = u_{xxtt} \tag{13.17}$$

(siehe Doppel und Jacob [10]) ein nichtlineares homogenes Dirichlet–Problem betrachten.

i) Der lineare Teil

Mit $A = \{(1,1)\}$ erhalten wir als Norm

$$\|\varphi\|_A^2 = \int_G (\varphi_{xt}^2 + \varphi^2)\, dx\, dt \tag{13.18}$$

für $\varphi \in C_0^\infty(G)$ und damit den zugehörigen Hilbertraum $H_0^A(G)$. Aufgrund der Poincaré–Ungleichung (4.2) gibt es eine geeignete Konstante C mit

$$\|u\|_0^2 \leq C \|u_{xt}\|_0^2 ,$$

so daß wie bei (13.7) gilt

$$\begin{aligned} A[u,u] &= \int_G u_{xt}^2\, dx \geq \frac{1}{2}\int_G u_{xt}^2\, dx + \frac{1}{2C}\int_G u^2\, dx \\ &\geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2C}\right\} \|u\|_A^2 \end{aligned} \tag{13.19}$$

für $u \in H_0^A(G)$.

ii) Der nichtlineare Teil

Die einzige Möglichkeit $\lambda \in \mathbb{N}^N$ gemäß Abschnitt 10.1. (bzw. Abschnitt 12.2.) zu wählen, ist $\lambda = (1,1)$. Aus

$$\left| \gamma + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q}, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q} \right) : (1,1) \right| = \gamma_1 + \gamma_2 + 1 - \frac{2}{q} < 1$$

folgt $|\gamma| < \frac{2}{q}$. Wegen $2 < q < \infty$ schließen wir, $\gamma = (0,0)$ ist der einzige mögliche Multiindex. Somit ist $K(\lambda) = (0,0) \times (2,\infty) \subset \mathbb{N}_0^2 \times \mathbb{R}$ (vgl. Adams [2], Theorem 6.2). Es ist offensichtlich, daß für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, die Funktion

$$b(x,t) = b(t) = d\,t^k, \qquad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ d \neq 0 \tag{13.20}$$

die Bedingung (E1) mit $q = k+1$ erfüllt. Die Stammfunktion

$$s(t) = \frac{d}{k+1} t^{k+1} \tag{13.21}$$

genügt der Bedingung (E2) mit $\vartheta = \frac{1}{k+1}$ und definiert gemäß (10.6) einen Nemytskiĭ–Operator $S(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow L^1(G)$. Damit erhalten wir das Fréchet–differenzierbare Funktional

$$F(u) = \int_G \left(\tfrac{1}{2} u_{xt}^2 - \frac{d}{k+1} u^{k+1} \right) dx\,dt\,,$$

das der (PS)–Bedingung genügt. Weiter sind die Bedingung (E3) und auch Teil i) von Bedingung (E4) erfüllt, wenn d für ungerade k positiv ist. Dann hat

$$u_{xxtt} - d\,u^k = 0 \tag{13.22}$$

eine verallgemeinerte Lösung von Problem D gemäß den Sätzen 12.1. und 12.2., d.h. es existiert eine Funktion $u \in H_0^A(G)$, $u \neq 0$, die der Funktionalgleichung

$$\int_G \left(u_{xt}\, \varphi_{xt} \;-\; d\, u^t\, \varphi \right) dx\, dt \;=\; 0 \qquad (13.23)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$ genügt.

13.3. Die Boussinesq–Gleichung

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Wir wollen die Gleichung

$$u_{tt} - a\,u_{xx} - c\,u_{xxxx} + d\,(u^2)_{xx} = 0, \quad a,c,d \in \mathbb{R},\ c > 0,\ d \neq 0 \tag{13.24}$$

betrachten. Diese Gleichung ist mit der Gleichung (13.1) durch die Substitution $u := v_x$ verwandt

$$\partial_x \left(v_{tt} - a\,v_{xx} - c\,v_{xxxx} + d\,(v_x^2)_x \right) = 0, \tag{13.25}$$

davon werden wir hier keinen Gebrauch machen. Wir substituieren in (13.24) $u := w_{xx}$ und erhalten

$$w_{xxtt} - a\,w_{xxxx} - c\,w_{xxxxxx} + d\,(w_{xx}^2)_{xx} = 0. \tag{13.26}$$

Diese Gleichung wollen wir jetzt untersuchen.

i) Der lineare Teil

Es ist

$$A(x,D)w = w_{xxtt} - a\,w_{xxxx} - c\,w_{xxxxxx} \tag{13.27}$$

und

$$A = \{(1,1),(2,0),(3,0)\}. \tag{13.28}$$

Wieder gilt für $w \in H_0^A(G)$

$$\begin{aligned} A[w,w] &= \int_G \left(w_{xt}^2 - a\,w_{xx}^2 + c\,w_{xxx}^2 \right) dx\,dt \\ &\geq C_0 \| w \|_A^2 \end{aligned} \tag{13.29}$$

mit einer passenden Konstanten $C_0 > 0$, analog zu (13.7) mit einer entsprechenden Einschränkung an den Koeffizienten a.

ii) Der nichtlineare Teil

Wählen wir $\lambda = (3,1)$, so haben wie $(\lambda) \subset \bar{A}$ und mit $\gamma = (2,0)$ folgt

$$\left| (2,0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) : (3,1) \right| = \frac{5q-2}{6q} + \frac{q-2}{2q} = \frac{8q-8}{6q} < 1$$

d.h. es muß $2 < q < 4$ gelten. Somit ist die Potenz $q = 3$ zulässig. Die Funktion

$$b(x,t) = b(t) = d\,t^2$$

erzeugt den Nemytskiĭ–Operator $\tilde{B}(\cdot)$, so daß die Nichlinearität in (13.26) die Gestalt hat

$$d\,(w_{xx}^2)_{xx} = \partial^7 \tilde{B}(\partial^7 w)\,.$$

Die Funktion $b = b(t)$ erfüllt die Bedingung (E1) mit $q = 3$. Mit der Stammfunktion

$$s(x,t) = s(t) = \frac{d}{3} t^3$$

erhalten wir das Fréchet–differenzierbare Funktional

$$F(w) = \int_G \left[\frac{1}{2} (w_{xt}^2 - a\, w_{xx}^2 + c\, w_{xxx}^2) + \frac{d}{3} w_{xx}^3 \right] dx\, dt\,. \qquad (13.30)$$

Weiterhin erfüllt die Funktion $s = s(t)$ wieder wie in Abschnitt 13.1. die Bedingungen (E2), (E3) und Teil ii) von (E4). Damit liefert Satz 12.1. eine nichttriviale Lösung $w \in H_0^A(G)$ der der Gleichung (13.26) zugeordneten

Funktionalgleichung

$$\int_G \left(w_{xt}\,\varphi_{xt} - a\,w_{xx}\,\varphi_{xx} + c\,w_{xxx}\,\varphi_{xxx} + d\,u_{xx}^2\,\varphi_{xx} \right) dx\,dt = 0 \qquad (13.31)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Beachtet man die Substitution $u = w_{xx}$ und integriert im ersten Term von (13.31) partiell, so genügt die Funktion $u \in L^2(G)$ der Funktionalgleichung

$$\int_G \left(u\,\varphi_{tt} - a\,u\,\varphi_{xx} + c\,u_x\,\varphi_{xxx} + d\,u^2\,\varphi_{xx} \right) dx\,dt = 0 \qquad (13.32)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Es gilt $u_x = w_{xxx} \in L^2(G)$.

13.4. Die Kadomtsev–Petviashvili–Gleichung

Wir wollen noch die Gleichung

$$\left[a\,u_t + d\,u_{xxx} + 2e\,(u\,u_x) \right]_x - u_{yy} = 0, \quad a,d,e \in \mathbb{R},\ d > 0,$$

betrachten. Diese Gleichung ist eine Verallgemeinerung der Korteweg–de Vries–Gleichung auf zwei Raumdimensionen (siehe Kadomtsev und Petviashvili [17], Ablowitz und Fokas [1]). und beschreibt Oberflächenwasserwellen, bei denen die Oberflächenspannung die Schwerkraft dominiert. Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$u_{yy} - a\,u_{xt} - d\,u_{xxxx} - e\,(u^2)_{xx} = 0 \qquad (13.33)$$

und suchen Lösungen der Gestalt

$$u(x,y,t) = v(x - c\,t, y) = v(\xi, y), \qquad (13.34)$$

$x - c\,t = \zeta$ mit $c > 0$ fest, d.h. wir suchen solitäre Wellenlösungen, die sich in positiver x–Richtung mit der Geschwindigkeit c bewegen. Durch Einsetzen von (13.34) in (13.33) erhält man die Gleichung

$$v_{yy} + a\,c\,v_{\zeta\zeta} - d\,v_{\zeta\zeta\zeta\zeta} - e\,(v^2)_{\zeta\zeta} = 0 \qquad (13.35)$$

(vgl. die Boussinesq–Gleichung (13.24)) auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Analog zu Abschnitt 13.3 erhält man auf einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ eine nichttriviale Lösung $v \in L^2(G)$, mit $v_x \in L^2(G)$, der Funktionalgleichung (vgl. (13.32))

$$\int_G \left(v\,\varphi_{yy} + a\,c\,v\,\varphi_{\zeta\zeta} + d\,v_\zeta \varphi_{\zeta\zeta\zeta} - e\,(v^2)\varphi_{\zeta\zeta} \right) dy\,d\zeta = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$ (mit einer Einschränkung an den Koeffizienten ac, falls $a < 0$ ist). Haben wir zum Beispiel solch eine Lösung auf dem Quader $Q = (0,L)\times(0,M)$, $\zeta \in (0,L)$, $y \in (0,M)$, so folgt für (13.33), daß man für jedes $t \in \mathbb{R}$ auf $G_t = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in (0,M)$ und $c\,t < x < L + c\,t \}$ eine nichttriviale Lösung $u \in L^2(G_t)$, mit $u_x \in L^2(G_t)$, der Funktionalgleichung

$$\int_{G_t} \left(u\,\varphi_{yy} + a\,c\,u\,\varphi_{xx} + d\,u_x\,\varphi_{xxx} - e\,u^2\varphi_{xx} \right) dx\,dy$$

$$= \int_{G_t} \left(u\,\varphi_{yy} - a\,u\,\varphi_{xt} + d\,u_x\,\varphi_{xxx} - e\,u^2\varphi_{xx} \right) dx\,dy = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G_t)$ hat.

Literatur

[1] Ablowitz, M.J., und A.S. Fokas: On the inverse scattering of the time-dependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev–Petviaschvili (1) equation. – Stud. Appl. Math. 69, 1983, 211-228.

[2] Adams, R.A.: Sobolev spaces. – Academic Press, New York–San Francisco–London, 1975.

[3] Ambrosetti, A., und P. Rabinowitz: Dual variational methods in critical point theory and applications. – J. Funct. Anal. 14, 1973, 349-381.

[4] Aubin, J.-P., und I. Ekeland: Applied nonlinear analysis. – John Wiley & Sons, New York–Chichester–etc., 1984.

[5] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. – Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1974.

[6] Besov, O.V., V.P. Il'in und S.M. Nikol'skiĭ: Integral representations of functions and imbedding theorems, Vol. 1. – V.H.Winston & Sons, Washington D.C., 1978. [Translation of Integral'nye predstavleniya funktsiĭ i teoremy vlozheniya, Nauka, Moskva, 1975.]

[7] Boussinesq, M.J.: Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. – Comptes Rendus 72, 1871, 755-759.

[8] Boussinesq, M.J.: Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide

contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. – J. Math. Pures Appl. 2, 1872, 55-108.

[9] Deift, P., C. Tomei und E.Trubowitz: Inverse scattering and the Boussinesq equation. – Comm. Pure Appl. Math. 25, 1982, 567-628.

[10] Doppel, K., und N. Jacob: A non-hypoelliptic Dirichlet problem from stochastics. – Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 8, 1983, 375-390.

[11] Fermi, E., J. Pasta und S. Ulam: Studies of nonlinear problems. I. – Nonlinear wave motion (A.C. Newell, Ed.), Lectures in Applied Mathematics 15, American Mathematical Society, Providence, 1974, 143-156.

[12] Friedman, A.: Partial differential equations. – Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1969. Reprint Robert E. Krieger Pub. Co., Huntington (New York), 1976.

[13] Hirota, R.: Exact N–soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow–water and in nonlinear lattices. – J. Math. Phys. 14, 1973, 810-814.

[14] Hörmander, L.: Linear partial differential operators. – Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

[15] Jacob, N.: On generalized Dirichlet problems – Math. Scand. 55, 1984, 245-252.

[16] Jacob, N. und B. Schomburg: On Gårding's inequality. – [Manuskript.]

[17] Kadomtsev, B.B., und V.I. Petviashvili: On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. – Sov. Phys. - Doklady 15, 1970, 539-541. [Translated from Dokl. Akad. Nauk SSSR 192, 1970, 753-756.]

[18] Kalantarov, V.K., und O.A. Ladyzhenskaya: The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types. – J. Sov. Math. 10, 1978, 53-70. [Translated from Inst. im. V. A. Steklova AN SSSR 69, 1977, 77-102.]

[19] Kruskal, M.D.: The Korteweg–de Vries equation and related evolution equations. – Nonlinear wave motion (A.C. Newell, Ed.), Lectures in Applied Mathematics 15, American Mathematical Society, Providence, 1974, 61-83.

[20] Louhivaara, I.S., und C.G. Simader: Über nichtelliptische lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten.– Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 513, 1972.

[21] Louhivaara, I.S., und C.G. Simader: Über das verallgemeinerte Dirichletproblem für koerzitive lineare partielle Differentialgleichungen. – Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 2, 1976, 327-343.

[22] McKean, H.P.: Boussinesq's equation on the circle. – Comm. Pure Appl. Math. 34, 1981, 599-691.

[23] Nikol'skiĭ, S.M.: Properties of differentiable functions of several variables at the boundary of their domain of definition. – Sov. Math. - Doklady 3, 1962, 1357-1390. [Translated from Dokl. Akad. Nauk SSSR 146, 1962, 542-545.]

[24] Nikol'skiĭ, S.M.: The first boundary problem for a general linear equation. – Sov. Math. - Doklady 3, 1962, 1388-1390. [Translated from Dokl. Akad. Nauk SSSR 146, 1962, 767-769.]

[25] Nirenberg, L.: Variational and topological methods in nonlinear problems. – Bull. Amer. Math. Soc. 4, 1981, 267-302.

[26] Rákosník, J.. Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I. – Beiträge zur Analysis 13, 1979, 55-68.

[27] Rákosník, J.: Some remarks to anisotropic Sobolev spaces II. – Beiträge zur Analysis 15, 1981, 127-140.

[28] Scott, A.C.: The application of Bäcklund transforms to physical problems. – Bäcklund transformations (R.M. Miura, Ed.), Lecture Notes in Mathematics 515 (Proceedings of the NSF Research Workshop on Contact Transformations, Nashville, Tennessee, 1974), Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976, 80-105.

[29] Showalter, R.E.: Hilbert space methods for partial differential equations. – Pitman Publ. Ltd., London, 1979.

[30] Tafel, W.: Relative Beschränktheit und maximale Differentialoperatoren. – Dissertation an der Fakultät für Mathematik der Ludwig–Maximilians–Universität München, 1979.

[31] Toda, M., und M. Wadati: A soliton and two solitons in an exponential lattice and related equations. – J. Phys. Soc. Jap. 34, 1973, 18-25.

[32] Triebel, H.: Höhere Analysis. – VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

[33] Vainberg, M.M.: Variational methods for the study of nonlinear operators. – Holden Day Inc., San Francisco–London–Amsterdam, 1964. [Translation of variatsionnye metody issledovaniya nelineinykh operatorov, Moscow, 1956.]

[34] Zabusky, N.J.: A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction. – Nonlinear partial differential equations (W.F. Ames, Ed.), Academic Press, New York–London, 1967, 223-258.

[35] Zakharov, V.E.: On stochastization of one-dimensional chains of nonlinear oscillators. – Sov. Phys. - JETP 38, 1974, 108-110. [Translated from Zh. Eksp. Teor. Fiz. 65, 1973, 219-225.]

ANHANG

Zusammenfassung

Zuerst wurden in Kapitel 3 anisotrope Sobolevräume, die Hilberträume $H^A(G)$, $H_0^A(G)$ definiert, anschließend wurden in Kapitel 4 Einbettungseigenschaften dieser Räume behandelt, insbesondere ein Kompaktheitsresultat, Lemma 4.6.. In Kapitel 5 wurde eine Klasse von Gebieten, R–Gebiete, angegeben, für die man Spuroperatoren erhielt.

In Kapitel 6 führten wir eine Palais–Smale–Bedingung, die (PS)–Bedingung, ein. Weiterhin wurde die von uns benötigte Version des "Mountain Pass"-Lemma angegeben. In den nächsten Kapiteln führten wir den linearen Operator $A(\cdot, D)$, die zugehörige Bilinearform $A[\cdot,\cdot]$, den Begriff der $H_0^A(G)$–Elliptizität und die nichtlinearen Nemytskiĭ–Operatoren ein. Anschließend formulierten wir ein verallgemeinertes homogenes Dirichlet–Problem, Problem D in Kapitel 9.

In Kapitel 10. wurde mit Hilfe der Bilinearform $A[\cdot,]$ und der Bedingung (E1) ein Funktional $F(\cdot): H_0^A(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ eingeführt, aus dessen Fréchet–Ableitung man die Funktionalgleichung in Problem D erhält. Die Fréchet–Differenzierbarkeit und ein im Beweis des Existenzsatzes benötigtes Lemma wurden bewiesen. Im 11. Kapitel wurde unter Annahme der $H_0^A(G)$–Elliptizität für $A(\cdot, D)$ und der Bedingung (E2) gezeigt, daß das Funktional $F(\cdot)$ der (PS)–Bedingung genügt Danach wurde in Kapitel 12 unter zusätzlichen Voraussetzungen, den Bedingungen (E3) und (E4), der Existenzsatz bewiesen.

Zum Schluß wurde das Resultat auf einige Gleichungen, unter anderem die Zabusky– und die Boussinesq–Gleichung angewandt.

Lebenslauf

Am 14. Juli 1956 wurde ich, Gerald Warnecke-Lähnemann, in Berlin-Neukölln geboren. Meine Eltern sind die Sozialarbeiterin Hannelore Warnecke, geb. Gnädig, und der Meteorologe Prof. Dr. Günter Warnecke. Ich bin mit der Referendarin Christiane Lähnemann verheiratet. Unser Sohn Jonas wurde im Januar 1982 geboren.

Das Abitur bestand ich im Dezember 1974 an der John-F.-Kennedy-Schule in Berlin-Zehlendorf. Mit dem Wintersemester 1975/76 begann ich das Mathematikstudium an der Freien Universität Berlin. Von Oktober 1977 bis März 1981 war ich studentischer Tutor am Fachbereich Mathematik. Das Vordiplom erhielt ich im Dezember 1977. Im März 1981 beendete ich meine Diplomprüfung erfolgreich.

Seit April 1981 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Analysis an der FU beschäftigt. Das akademische Jahr 1981/82 verbrachte ich mit einem Studienaufenthalt an der University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, als Stipendiat der Fulbright-Kommission. Nach meiner Rückkehr begann ich mich auf das Dissertationsvorhaben vorzubereiten.

Berlin, den 15. März 1985